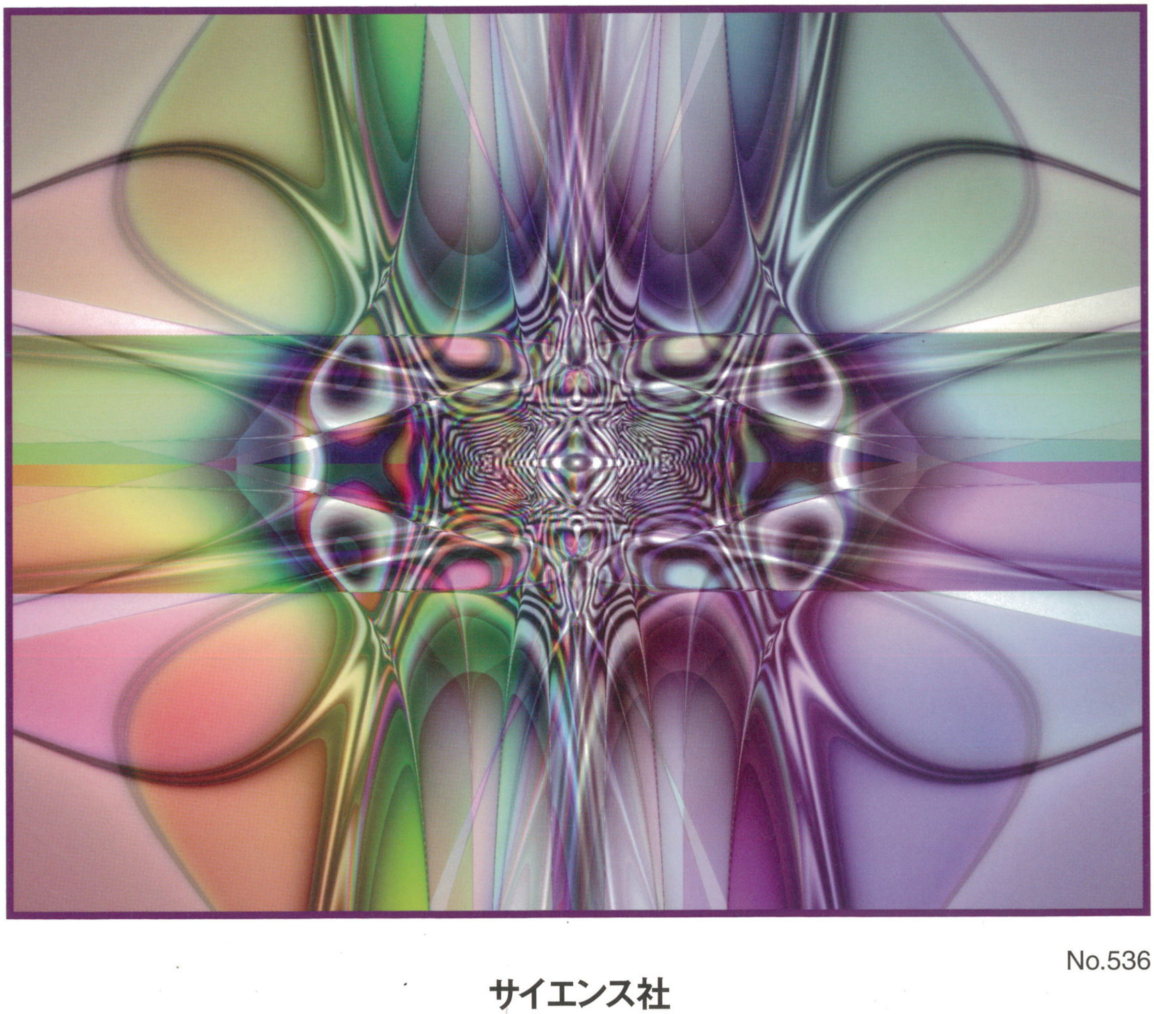
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年2月1日発行　第46巻2号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

2
2008

特集 ゲージ重力対応
超弦理論が切り開く現代物理の新地平



No.536

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 536 February 2008

ゲージ重力対応

超弦理論が切り開く現代物理の新地平

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2005 年/1 省略
2005 年/2 エンタングルメント理論とその展開
/3 最新 脳の数学理論
/4 量子重力理論最前線
別冊 相対論の歩み
/5 ベクトル
/6 物理法則と方程式
/7 量子異常とは何か
/8 モジュライの広がり
/9 対称性とは何か
/10 不確定性原理の新展開
別冊 スーパーストリング
/11 0 の発見
/12 現代代数学への誘い
2006 年/1 偶然から必然へ
/2 物理法則の直観的理解
/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊 量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊 場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る

数理科学臨時別冊一覧

07 年/1 ゲノム進化を考える
07 年/3 非平衡統計力学
07 年/5 超幾何関数入門
07 年/6 相対性理論
07 年/7 ３次元トポロジーの新展開
07 年/9 数理·情報系のための整数論講義
07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

February 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 536

特集／ゲージ重力対応

はじめに

米谷 民明

この号のタイトル「ゲージ重力対応」は，読者にとって聞き慣れないものであろう．「ゲージ」は，素粒子相互作用に使われているゲージ場の理論を，「重力」は，アインシュタインの一般相対性理論を基礎とする重力場の理論を指している．両者は全く異なった相互作用を記述し，一方はゲージ不変性，もう一方は一般相対性という異なった対称性の原理に基づく．「対応」とは，この両者が，実はある場合，適当な条件の下で，全く同じ物理の異なった記述・表現になっていることを表す．

簡単なアナロジーとして，フーリエ変換を思い浮かべると良い．同じものを，全く違った量，ないしは異なった考え方によって表せ，どちらが便利かは，考える問題の性格による．そういうことは物理や数学ではよくあり，「双対性」と呼ばれる．ゲージ理論と一般相対性理論という二つの理論体系の間にも双対性が成り立ち得るというのである．

「ゲージ重力対応」は，20 世紀後半の素粒子論の成果を受け，量子論と一般相対性理論の最終的統一へ向けて超弦理論の進展によって切り開かれた，場の量子論に関する新たな展望を特徴づける中心概念である．その理解の深化は，超弦理論の背後にあるべき原理の探求にも重要である．本特集は，これまでの成果を系統的に整理してゲージ重力対応の意義，成果，可能性などについて，できるだけ平明に解説する意図で企画された．

ゲージ重力対応の認識の起源は，超弦理論の歴史的な起源そのものと符合する側面が多い．「ゲージ重力対応とは何か」（米谷）は，そうした歴史的経緯も含めて特集全体への序論を与える（参考のため簡単な年表（表 1）を次頁に付した．また，インタビュー記事も参照）．「D ブレーンの力学からゲージ重力対応へ」（橋本）では，対応の基礎にある D ブレーンとその力学について説明する．「弦理論と QCD」（酒井（忠）・杉本）は，対応をクォークの力学のゲージ理論である QCD（量子色力学）に応用する試みを紹介する．「ゲージ重力対応と強い相互作用」（夏梅）は，QCD から導かれるべきクォーク多体系の流体力学的性質を重力側から説明する試みについて解説する．一方，ゲージ重力対応は，量子重力の捉え方に関する考え方としてのホログラフィー原理と密接な関係にあり，その具体的な実現と見なせる．「ホログラフィーと宇宙」（白水）は，宇宙物理学者の観点からその考え方を概説する．続く 3 編は，ゲージ重力対応のより技術的側面にも触れる．したがって，他に比べていくらか専門的な内容を含むが，ゲージ理論や重力理論について少しでも知識を持った読者にとっては，より実際的に対応の中身を把握するのに有用と期待している．「AdS/CFT 対応におけるウィルソンループ」（三輪）および「巨大重力子・泡状時空・行列模型」（土屋）は，ゲージ重力対応

表 1　ゲージ重力対応に関わる弦理論の進展と関連事項.

年	重力	弦理論	場の理論
1968		ヴェネチアノ公式	
1969〜71		弦の描像	
1972〜75	ブラックホールエントロピー（ベケンシュタイン公式） ホーキング輻射	ゲージ理論および一般相対性理論との関係（$\alpha' \to 0$ 極限） 開弦–閉弦双対性 臨界時空次元 紫外有限性の認識（モジュラー不変性）	量子色力学（QCD） 漸近自由性 大 N 極限（プラナー展開） 非摂動的古典解（ボーテックス．モノポール，インスタントン） 格子ゲージ理論 超対称ゲージ理論
1976	超重力場の理論	時空超対称な弦理論	
1983〜88		量子異常の打ち消し機構 T 双対性 5 種の摂動的超弦理論 コンパクト化機構	2 次元共形場理論
1990〜94	ホログラフィック原理	低次元行列模型（二重スケーリング極限）	サイバーグ・ウィッテン理論（場の理論における双対性の進展）
1995〜96		D ブレーン ブラックホールエントロピーの D ブレーンによる解釈 M 理論予想，摂動的弦理論の双対性 10 次元行列模型	
1997		AdS/CFT 対応予想	
1998〜現在		GKP-W 関係式 ゲージ重力対応の理解・応用の進展	

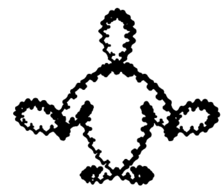
の具体的な代表例について，そして「AdS/CFT 対応はどこまで確かめられているか」（酒井（一））は，対応を厳密に確立しようとする方向へ向けた発展を紹介する．本特集に関連した弦理論，重力理論，ゲージ理論などの基礎を学ぶには，「名著に親しむ」（窪田）を参考にしてもらいたい．

最後に，用語についての注意を一つ．ゲージ重力対応の典型例として，「AdS/CFT 対応」という語が頻繁に出てくる．実は，重力側が “AdS” であり，ゲージ側が “CFT” である．したがって「ゲージ重力対応」のタイトルの下では，本来，「CFT/AdS 対応」と呼ぶのが適切である*1)．しかし，奇妙ではあるが「ゲージ重力対応」も「AdS/CFT 対応」も，すでに定着した用語になっている．そのため，統一に欠け，読者には混乱を招く恐れがあるにも関わらず，あえて定着した呼び方を変えないことにした．違和感を感じる読者が多いだろうが，これを頭に入れていただきたい．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

*1)　例えばウィッテンの 1998 年の論文ではこちらを採用している．

ゲージ重力対応とは何か



米谷　民明

ゲージ重力対応の意味を歴史的な位置づけと展望に重点を置いて論ずる．以前の特集「素粒子像の探究—統一への地平をたどる」(2006年12月号)における筆者による総説「現代の素粒子像—湯川・朝永から弦理論まで」の続きとして，数式なしの『対話』形式で進める．［登場人物：学生（**真**：大学2年生，**物部**：大学院生）と研究者（**弦理**)］

■　1. 弦の発見　■

真：前に，1970年代のゲージ理論による総合を包括した，さらなる物理学の枠組みの統合が弦理論によってなされるかも知れないというお話があり，別の機会に議論しようということでした．まさにそういう話になるのですね．楽しみだな．

物：前回はほとんど議論できなかった弦理論が生まれた背景から始めましょうか．

弦：50年代以後の素粒子論の発展で弦理論につながるのは，π中間子や陽子や中性子の仲間の粒子が，多数（中間子族だけでも100を越える）存在することが明らかになった点です．これらを総称して「ハドロン」と呼びます．粒子は量子論では場によって表されるわけですから，ハドロンのそれぞれに独立した量子場を考えなければなりませんが，色々と問題が生じます．まず，独立な量子場がそんなに多いとすると，量子場の概念に基本的な意味があるのかどうか疑問になるでしょう．また，量子電気力学で成功したのと同じ方法（摂動論）ではこれらの粒子の相互作用を信頼できる形で記述できないという問題も重大です．摂動論は，力の強さが十分に小さい場合にのみ有効なものです．しかし，量子電気力学のときの力に比べて，核子や中間子の相互作用は100倍程度の強さなのです．

物：「強い相互作用」と呼ばれる理由ですね．場の概念自体というより，場を扱う方法論の問題が生じたということでしょうか．

弦：その意味を理解するには，最初の疑問，そんなに場の数が多くてよいのかという点に立ち返る必要があります．その解決として，前回も説明したように，ハドロンはより基本的な粒子であるクォークから構成されていて，その力学がゲージ理論によって支配されていると70年代に判明したのでした．しかし，そこまで到達するまでに，強い相互作用を扱う方法論が色々と考え出されたわけです．簡単に言うと，量子場の運動方程式を直接解くのではなく，現象の間の関係をいくつかの一般的原理の下で調べ，その法則性を明らかにしようというものです．「流れ代数」の方法とか，「レッジェ極の方法」とか呼ばれるものです．

真：もしかして，量子力学を最初提唱したときにハイゼンベルクが採用した考え方と近いのかな．現象の間の関係をつけるって，原子が発する光のスペクトルを行列を使って整理して新しい力学にまとめ上げたのに似ていそう．

弦：それは「流れ代数」の場合によいアナロジー

です．例えば電流密度のようなハドロンを特徴づける重要な物理量に対応する演算子（＝「流れ」演算子）が満たす交換関係によってその行列要素を関係づけるというのが，流れ代数の基本的なアイデアです．

物：その考え方は現在の弦理論でも用いてますね．レッジェ極については，前に質問したことがあったので私から説明すると，要するに，粒子の交換を角運動量の複素平面の極特異点の性質として表すと，相互作用振幅の，特にエネルギーが高いときの振舞いを整理して表せるということ．

弦：その言い方は抽象的なので真君には難しいな．ここでは弦理論と関係する最後の結果だけにして，多数のハドロンをその質量 M（の 2 乗）とスピンの大きさ（J）の関係式で表して分類するのが有効だと判明したと言っておこうか．

物：それをチュー・フラウチ（Chew–Frautschi）プロットと呼び，$J=\alpha(M^2)=\alpha' M^2+\alpha(0)$ と表します．傾き α' と切片 $\alpha(0)$ の 2 個のパラメターがあるが，特に α' は中間子族のハドロンにほぼ共通の定数なのですね．

真：では，その定数 α' って，行列力学のときのプランク定数みたいなものなのかな．

物：なかなかするどい．これも良い指摘だな．

弦：それこそが弦理論が最初考えられるに至るのに鍵の役割を果たしました．それに加えて「チャンネル双対性」と呼ばれる性質の発見が重要です．

物：それで初期の頃は，弦理論のことを「双対共鳴模型」と呼んでいた．

弦：そうそう．2 個のハドロンの衝突が，ハドロンの交換（t チャンネル描像）によってか，衝突によってハドロンが生成され（共鳴状態と呼ぶ）また 2 個のハドロンに分かれる（s チャンネル描像），という 2 つの見方（図 1）のうち，どちらの描像でも同等に現せるという性質です．定数 α' の普遍性とチャンネル双対性をうまく取り入れた中間子の散乱振幅を現す公式が，1968 年にヴェネチアノによって提唱され，1 年ほど経て，その公式を弦の運動によって理解できたのです．この発見は，南部，サスキント，ニールセンの 3 人によって独立

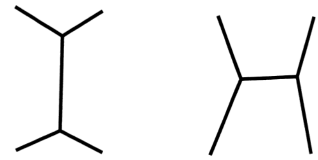


図 1　時間が下から上に縦に進むとしたときの 2 つの描像．左：s チャンネル描像，右：t チャンネル描像．これ以後の図もすべて時間が縦に流れているとしている．

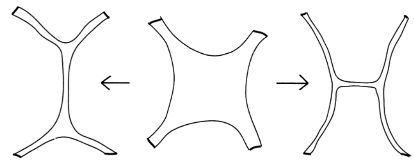


図 2　弦の軌跡である世界膜からチャンネル双対性が容易に理解できる．左の s チャンネル描像と右の t チャンネル描像は，中間の図のような一般的な形をした世界膜を通じて特異点なしの連続的な変形で結びつく．

になされました．

物：$1/\alpha'$ は，弦の単位長さ当たりのエネルギー（張力定数）だし，チャンネル双対性は，弦の運動の時空中での軌跡を現す膜（世界膜と呼ぶ）の配位に関して，時間の方向に長く伸びたとき（s チャンネル描像）と空間方向に伸びた（t チャンネル描像）のがスムーズにつながっていること（数学的にはそれぞれの領域が解析接続でつながるのに相当する）により説明できる（図 2）．現在の超弦理論においても最も基本的な性質ですね．

■ 2. 重力と弦理論 ■

弦：ところが，歴史の皮肉と言えるようなある展開が生じます．多数のハドロン共鳴状態を，弦の振動とか回転など様々な励起状態として理解できるという考えはごく自然です．さらに，ハドロンがクォークから構成されているのに，なぜクォークが単独では作り出せないのかという，いわゆる「クォーク閉じこめ」の説明もできます．弦の端がクォークだとして，クォークを単独に取り出すためクォーク間の距離を増やそうとすると，もし弦の張力定数が普遍的な定数であれば，弦の長さに

比例して必要なエネルギーが増えるので，単独では分離できないからです．弦が途中で切れたら，その端にはクォークが必ずあるのだから，クォークはその反粒子との対としてしか生成できません．そこで，ヴェネチアノ公式とその拡張が詳しく調べられ，重大な問題が判明したのです．弦をその性質を厳密に保って扱う限り，必ず質量ゼロの状態が存在するという結論になります．しかし，ハドロンには質量ゼロの状態は存在しない．もし，この事実を無視して，無理やり質量ゼロ粒子が現れないように理論を変更すると，「負の確率」が現れるなど，量子力学の原理と矛盾してしまうのです．

真：質量ゼロの粒子と言うと，僕が知っているのは，光子だけだな．ああ，重力の粒子である重力子というのもゼロかな．まだ検出はされてないけど．

物：なぜ質量ゼロの粒子が現れるかは，α' の普遍性にあると言ってよいですね．直観的には，長さがゼロの極限ではエネルギーがゼロになるから．

弦：単純に長さがゼロになると言うよりも，量子論特有のゼロ点振動が絡むことによって，質量ゼロであってスピン J が1とか2の状態が必ず生じることが重要です．それには，弦の量子論を支配している対称性が欠かせない役割を果たしています．

物：つまり，レッジェ切片で言えば，$\alpha(0)=1$ とか，$\alpha(0)=2$ が結論される．1の場合は，両端があるいわゆる「開弦」で，2の場合は端がないゴム輪のような「閉弦」に対応する．それと実は，α' の値も「開弦」と「閉弦」では，後者の場合の値が前者の半分ですね．閉弦の最大回転状態は同じ回転をする2本の開弦の両端をくっつけたものと同じと見なせることから説明できる．

真：弦理論を一般相対性理論やゲージ理論を含む統一理論として考えるという見方が現れたそうですが，質量ゼロ粒子の存在と関係するのですね．

弦：歴史の皮肉とは何かと言うと，ハドロンの理論だと思っていたものが実はよく調べてみると，どうもそうではないということが判明してしまったのです．特に，弦理論が一般相対性理論の拡張になっているという指摘は，最初1973〜74年に米谷，シャーク，シュワルツによってなされました．そのため，弦理論に関する関心は，その頃から急速に冷えてしまいました．弦理論はハドロンの理論というより，何らかの意味で一般相対性理論の拡張であることが明らかになったからです．その復活には，10年ほどの時間が必要でした．この指摘から少し後に，シャークとシュワルツは勇敢にも弦理論をすべての相互作用の統一理論として見直すべきとする短い論文も書きましたが，残念ながら当時の状況では根拠が薄弱な希望的観測と言わざるを得ないものだった．もしそうだとすると，弦の張力定数はニュートンの重力定数と関係し，いわゆるプランクの長さ $\sqrt{Gh/c^3}$（ほぼ，10^{-33} cm）で決まることになりますが，真面目には受け取られなかった．その頃は今とは大違いで，多くの研究者にとっては，一般相対性理論は，素粒子論には役立たない古色蒼然たる過去の遺物と思われていたようです．

物：それに加え，無矛盾な弦理論は，4次元ではなく26次元（フェルミオンを含む場合には10次元），いわゆる臨界次元の時空でしか存在できないと判明したのも大きいですよね．

弦：つまり，4次元を越える余剰次元の必要性が判明した．それも後でわかるように，ゲージ重力対応の成立にとって欠かせない点です．

真：歴史って色々と紆余曲折があるんですね．今は当然と思われるのに，認められるのに長い時間を経ている．アインシュタインの光量子論も，皆が納得するまでに15年以上もかかったそうですね．

■　3. ゲージ理論と弦　■

物：ゲージ重力対応の柱は，弦理論が一般相対性理論とゲージ理論を含む統一理論であるのが一つ．もう一つが，ゲージ理論と弦理論との関係ですね．

弦：そこにもまた歴史の皮肉があるのです．弦理論と一般相対性理論の関係が最初に議論されたのとほぼ同時期に，ゲージ理論自体にも実は弦理論的構造が隠されていると示唆するような洞察がなされたのです．きっかけになった指摘の一つは，

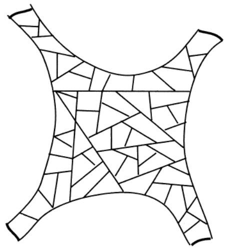


図 3　世界網が十分密になると世界膜を近似できる．これは平面型ファインマングラフと呼ばれるものの典型で漁網ダイアグラムとも呼ばれる．

ゲージ場とスカラー場の相互作用を記述するある理論で，古典的な場の方程式の解として「ひも」状の励起状態が存在できるという，ニールセンとオレーセンの仕事（1973 年）です．これとは別に，一般に，場の摂動論で粒子の交換や生成消滅が複雑に起こる状況を，時空では多数の粒子が網目のような軌跡を描く寄与として現れるという想像ができます．もし，この「世界網」が十分に密になると，弦の世界膜を近似的に表せそうです（図 3）．この考えは，崎田・ヴィラソロおよびニールセン・オレーセンによって，すでに 1970 年に論じられていましたが，73 年にさらに具体化する重要な観察がトホーフトによってなされました．それは，ゲージ理論の対称性を表す群が，$N \times N$ のエルミート行列がなす群（$U(N)$, $SU(N)$ など）の場合に，もし N を十分大きく（大 N 極限と呼ぶ）すると，トポロジー的にはまさに平面上に描ける網の目状の軌跡（プラナーファインマングラフと呼ぶ）だけが寄与することを発見したのです．これだけでは，ゲージ理論から弦理論が導けるかどうか全然明らかではないが，ゲージ理論と弦理論を結びつける重要な手がかりが得られたと言えます．

真：でも，そのどこが「皮肉」なんですか．

弦：1974 年頃を境に弦理論が研究者の関心から遠のいた理由のもう一つは，その頃に起こったゲージ理論の進展にあります．特に，クォークの相互作用の理論が，実はゲージ理論（量子色力学）であることが，いわゆる「漸近自由性」の発見（1973 年）などにより確実になりました．これは，相互作用の強さが短距離だけの性質で見れば，どんどん小さくなり，量子電気力学で成功を収めた「くりこみ理論」を用いた摂動論が適用できると判明したのによるわけです．しかし，今から見れば，トホーフトの指摘は，摂動論を越えたところで考えれば弦理論とゲージ理論が調和する可能性があることを予言したと解釈できます．実際，その頃，相互作用が強い場合のゲージ理論を扱うモデルとして格子ゲージ理論と呼ばれる方法が，ウィルソンによって提唱（1974 年）されましたが，その最初の論文においても，弦理論との類似性が強調されています．また，これらの議論は最初にあげたニールセンなどの指摘とは無関係に思われるかも知れませんが，実は，電場と磁場を交換して考えると互いに定性的には結びつけられ得るのです．

物：それにしても，その段階では，とても「重力」とは結びつきようがない．実際，今から 10 年ほど前までは，ゲージ理論から導けるかもしれないハドロンの「弦」と，重力を含む統一理論としての弦理論の「弦」は別物だと思われていた．実は皮肉にも本当は互いに深く関係している．

弦：ちょっと古い哲学めかした言い方を借りると，1973 年頃の問題に弁証法的に「止揚」されて戻ってきたとも言えるかな．

真：すごく興味がわいてきました．1973–1974 年は，現在につながる色々な発見がほとんど同時に起こり，展開点になっているのだな．

■　4. ゲージ重力対応とその意味　■

物：いよいよゲージ重力対応の要点に進みますか．

弦：ここでは，80 年代後半から 90 年代初頭あたりまでの超弦理論の発展を論じる余裕はないので，いきなり，十数年ほど前に起こった弦理論の進展から始めましょう．それは，なぜ「開」弦と「閉」弦という 2 種類があるかという問題に関する理解の深まりです．それまでは単に，たまたま端のある弦も存在できるとだけ考えられていたのですが，実はそうではなく，開弦の端は重大な物理的意味を持っているという認識がなされました．簡単に

言うと，弦の端は実はDブレーンと呼ばれる別の物理的自由度に対応するというのです（ポルチンスキー，1995年）．端の位置座標がそのままDブレーンの位置を表します．このDブレーンは一般に広がっていてよくて，空間的な広がりの次元がpのとき，Dpブレーンと呼びます．例えば，$p=1$なら，ちょうど元の弦と同じようにひも状ですし，$p=0$なら空間的広がりがないので，D粒子とも呼びます．物部君，続けてくれるかな．

物：Dブレーンは，普通の物体と同じように質量とか運動量を持っていますし，もちろん，時空を運動できる．もともとの開弦の端がくっついたり切れたりする強さを定数$\sqrt{g_s}$で現すと，質量は$1/g_s$に比例する．当然，重力を引き起こすが，もう一つ大事な性質は，弦理論に特有なあるゲージ場（RRゲージ場と呼ぶ）の源になるということ．電荷が光子に対応する電磁場のゲージ場（マックスウェル理論の4元ポテンシャル）の源であるのと同様です．重力子=重力場やRRゲージ場は，閉弦の中の質量ゼロ状態に対応します．それまでの弦理論では，このRRゲージ場の源が何なのかが10年以上に亘って謎であったのが，Dブレーンの認識によって解明されたのでした．

真：難しい．これまでの話とどう関係するのかな．それにそもそも「D」って何ですか．

物：Dブレーンが静止しているとする．このDブレーンを端点に持つ開弦は，Dブレーンの拡がった方向には自由に移動できる．だから，その方向については開弦の端に必要な境界条件は自由端の条件で，いわゆるノイマンの条件です．それに反して，拡がってない方向は固定していてディリシュレ（教科書ではよくディリクレと呼ぶ）条件を用います．それでDブレーンと呼ぶわけ．

弦：ゲージ重力対応の鍵になるのがDブレーンです．チャンネル双対性の観点からは．Dブレーンを開弦で記述する立場は，sチャンネル描像に対応する．つまり，Dブレーンを端点としてもつ開弦の運動によってDブレーン自体の運動が記述される．もし開弦どうしの相互作用が強いと，開弦が対で生成・消滅する過程も頻繁に起こる．これ

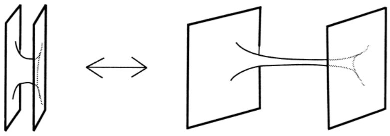


図４　D ブレーンの相互作用の２つの描像．開弦のループ（s チャンネル描像に対応）と閉弦の交換（t チャンネル描像に対応）は連続的な変形で結びつく．それぞれの図の２枚の板は，１次元の D ブレーン（D1 ブレーン）が２本平行に並んでいる場合の軌跡を表す．

を世界膜で調べるとすると，s チャンネル描像では，帯の端をつないだ円環の形をした膜をその中心軸を空間方向にして置いたような配位になります．このとき，帯はほぼ時間方向に向いている．一方，t チャンネル描像では，帯の幅を空間方向に引き伸ばすと想像すれば納得できるように，細長い筒状の膜になる．これは，閉弦が D ブレーン間でやり取りされている状況を現し，D ブレーンが重力子などの閉弦の源になるのに対応するわけです．図４を見てください．

物：真君，D ブレーンの概念は納得するのが難しいと思うけど，直観的な考えは，ちょっと想像をたくましくするとイメージはできるでしょう．

弦：s チャンネル描像は，もし関与する開弦が十分に短くて質量が軽い反面，D ブレーンが十分重たいとすると，開弦の状態のうちエネルギー的に最も低い状態，粒子としての解釈では質量ゼロでスピンが１の状態だけで記述できるので，通常のゲージ場として扱えます．このとき，ゲージ理論の対称性の群は，D ブレーンの数を N とすると $SU(N)$ になります．一方，t チャンネル描像の立場からは，D ブレーンが源になって生成する重力や RR ゲージ場（開弦のゲージ場と混同しないように）によってできる時空の歪みの長さに関するスケールが，閉弦の広がりを特徴づけるスケールに比して十分大きいと，やはり，閉弦の一番下の状態に対応する通常の重力場に RR ゲージ場など他の質量ゼロ状態だけを加えた理論（超対称があるので超重力理論と呼ぶ）での記述を正当化できる．これらを総合すると，適当な条件下では，D ブレーンの力学をゲージ理論としても，あるいは（超）重力場の理論によっても同等に記述できるという予想が成り立ちます．

物：チャンネル双対性についての解析接続のアナロジーがここでも相応しいんじゃないかな．この予想を最初に提唱したのはマルダセナで 1997 年秋のことでした．それから数カ月後にこの予想をさらに具体化する仕事が，ウィッテン，独立に，ガブサー，クレバーノフ，ポリアコフの３名の論文で発表された．

弦：彼らの論文が発表された直後 98 年３月頃，ちょうど弦/M 理論関係のワークショップを開催中のサンタバーバラ理論物理研究所に，私も含めて弦理論研究者が多数滞在中でしたが，正にこの話題一色で興奮状態にあったのを思い出します．

D ブレーンが重たい条件は $g_s \ll 1$，閉弦のつくる重力場の長さのスケールが閉弦の広がりに比して大きいためには $g_s N \gg 1$ が必要です．１個の D ブレーンの質量は $1/g_s$ に比例する一方，重力定数は g_s^2 に比例するので，N 個の D ブレーンの周りの重力場の強さは $g_s^{-1} N \times g_s^2$ で決まり，それがその長さのスケールを決めるからです．また，十分短い開弦だけで記述するには，閉弦側で見たとき D ブレーン間の距離のスケール r が条件 $r/\sqrt{\alpha'} \ll 1$ を満たしていれば正当化できると考えられます．実際にはもう少し細かい考察が必要ですが，これらの条件は，D ブレーンの個数 N が十分大きいときに同時に満たされます．最後の条件は，D ブレーンに十分近いところだけを考えるのに対応し，近地平（近ホライズン）極限と呼ばれています．

真：条件 $N \gg 1$ が，さっき話に出てきた 1973 年のトホーフトの大 N 極限の指摘に関係してくる？

物：それと弦理論が閉弦の力学を通して重力を含むことがうまく結びついて総合される．歴史の「皮肉」と表現された一見無関係に思われた認識が全部まとめられる可能性が 1/4 世紀を経て出てきた．でも，マルダセナの論文ってすごくもやもやした感じで，分かりにくかったです．

弦：マルダセナは特に $p = 3$，つまりゲージ理論と

しては 3(空間) +1(時間) 次元の場合を強調しました．このとき（AdS/CFT 対応と呼ぶ，その意味については後続のいくつかの解説で詳しく説明されているので参照のこと）は，ゲージ理論側と重力側がどちらも最大限に大きな超対称性に加えて，共形不変性と呼ばれる対称性を備えていて，両者の分析が他の場合に比べてやり易い．確かに彼の最初の論文だけだと，両方の物理量がどう関係するのかが，はっきり議論されていません．ウィッテンらの仕事は，D ブレーンの周りの閉弦の力学を，プローブ（探針）としての D ブレーンとの相互作用で取り出すという描像により，双方の物理量をどう比較すべきか明確な提案をした．それによって研究が爆発的に進み出した．

物：いわゆる GKP-W 関係式ですね．提唱者の頭文字を並べてこう呼ばれている．これは，よく言われるように，以前からトホーフト（1993 年）やサスキント（1994 年）が強調していたホログラフィー原理の具体的実現と見なすことができるのですね．

真：どういうことですか．

弦：これも重要な問題で本当は詳しく論じたいのですが，ここでは簡単に一言だけ述べておきましょう．量子重力は，時空の一種の「表面」＝境界にある自由度だけを用いて記述可能であるべきだという考えです．ウィッテンらの提案がなぜそれを実現しているかと言うと，プローブとしての D3 ブレーンは，今対象になっている多数の D3 ブレーンが作る 5 次元時空の近地平極限の有効領域の端としての時空の 4 次元の境界にある時空と見なせるので，確かに境界上のゲージ理論への応答を通して内部領域の重力現象が記述されている．あたかも境界においたスクリーンに映して内部にある N 個の D ブレーンの力学を記述しているので，ホログラフィーと呼ばれます．だからと言って文字通りゲージ理論自体が境界にあるというわけではないので混乱しないでください．‘あたかも’ というところが重要です．

物：それから，弦理論の 10 次元からなんで 5 次元時空かと言うと，残りの $10-5=5$ 次元は 5 次元（超）球面になってしまっているから．ゲージ理論側にも確かにこれに対応する内部回転対称性がある．もし，こうしたゲージ重力対応が普遍的に成り立つとすると，ゲージ理論の内容を重力理論に書き直したりその逆ができる．それは従来の場の理論の常識を完全に超える驚くべき性質です．でも，この対応はあくまでも予想であって，証明されているわけではないですね．

弦：例えば，重力理論は基本的に時空の一般座標共変性，ゲージ理論は内部空間に関して，それぞれゲージ対称性を備えているわけですが，それらがなぜ関係するのかに関して，弦理論にどちらも埋め込まれているという事実を超える場の理論自体の論理からの理解は十分ではありません．この対応には，時空の次元が高いところに D ブレーンが埋め込まれていることが重要なわけです．一方，ゲージ理論は場の理論としてはあくまでも D ブレーンの次元に等しい時空での理論です．

物：前に出てきた世界網（漁網ダイアグラム）がそのままゲージ場が住む時空上の弦の世界膜になるわけではない．

弦：そうです．それがより高次元の時空の重力理論，つまり閉弦の理論として解釈できることをゲージ理論の構造自体に基づき理解できればよいのですが，そういう理解はまだ残念ながら得られていないのです．また，超対称性や共形不変性が成立していない場合にどういう条件の下で「対応」がどこまで有効なのか，など多くの解明されるべき問題が残っています．

物：それに p が 3 でない場合，特に $p=0,1,2$ の場合はどうなんでしょうか．

弦：あまり議論が進んでいません．例えば，D 粒子（$p=0$）の場合は，g_sN が小さいときのゲージ理論の摂動論から，一般相対性理論の非線形性に合致する複雑な速度依存性を持った 3 体力が導けることが示されています（図 5）．こうした結果は，ゲージ理論と一般相対性理論の間に対称性に基づいた議論だけでは理解できない，もっと内在的な関係を示唆しているように思います．これらの問題を含めて，ゲージ重力対応の根拠についてより深い理解が必要です．もちろん，様々な場合

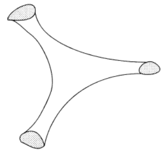


図5　D ブレーンの3体力を表す閉弦の世界膜．3体力は一般相対性理論の非線形性に対応するが，ゲージ理論の立場からも導ける（大川・米谷，1998年）．

への拡張を試みてその有効性をいわば「現象論」的に調べてデータを集める方向も進めるべきです．

物：さっきちょっと触れられたホログラフィーに関しての理解を進めるのも重要ですね．

弦：ブラックホールのエントロピー問題と関連していて，概念的な意味での大きな課題です．これらすべての側面を総合した理解が進めば，その先には，量子論と相対論を真に融合する新たな枠組みが見えてくるに違いないと考えています．これまでは想像もできなかった仕方で，物理の様々な側面に重力理論が関わってくる可能性があります．すでにその片鱗が見えてきていると言えます．しかし，より根本的にはこれらの背後にある開弦と閉弦の間のチャンネル双対性に関して高いレベルの理解が重要でしょう．それには，数学的な取扱いに関しても単なる技術的な問題を超えた新しい概念構成が必要で，これまでの枠を超える本質的な進展がなされなければならないと思います．既存の数学だけではそれに対処できず，量子力学のときにディラックが行ったような意味で，何らかの新しい数学を物理学の側から作り出す必要があるかも知れません．

物：天国にいるアインシュタインが最近の進展を知ったら，どう反応するでしょうかね．

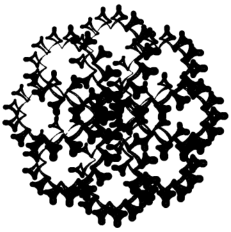
真：本当に深い問題なのだという感じは僕にも伝わってきました．これからいろんなことを勉強して再び考え，見直してみようと思います．

弦：それは頼もしい．この後，今日の話題に関連した様々な進展について解説がありますから，是非参考にしてください．それらを読んでから今日の話を復習すると理解が深まるでしょう．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

特集／ゲージ重力対応

Dブレーンの力学からゲージ重力対応へ



橋本　幸士

1. 基本的物体の次元？

この世の中の物理を記述する最も基本的な物体として，弦，すなわち１次元的に空間に伸びている物体，を考えるのはなぜだろうか？ 弦を構成要素とした理論，「弦理論」を作ると，弦の振動状態から重力子やゲージ粒子などが現れ，電磁気力などを表すゲージ理論と重力理論が統一される．すべての素粒子と力を統一する枠組みを探し求めている素粒子物理学者にとって，この結論は大変魅力的である．しかしなぜ，弦であって，例えば空間に２次元的に広がった膜ではないのか？ もしくは，もっと複雑な高次元物体ではないのか？ 弦理論では，粒子は弦がとても小さく縮まったものとして解釈されるが，同様に考えれば，例えば膜が小さく丸まれば弦のように見える．基本的な物体として弦を選ぶのはなぜだろうか？

この問いに対して，弦理論は驚くべき答えを用意していた．その答えとは，弦の理論から出発しても，実は他の次元の物体を基本的と考えて構成した理論と等価になってしまうかもしれない，ということである．弦理論に現れるこの「他の次元の物体」は，「ブレーン」と呼ばれている．ブレーンという言葉は，「膜」を表す英単語 membrane の一部に由来する．

この驚くべき答えを理解する手がかりは，10年ほど前にその重要性が認識された「Dブレーン」と呼ばれる多次元物体である．Dブレーンはブレーンの一種である．本特集の主題であるゲージ重力対応は，このDブレーンの性質から導かれる．Dブレーンを記述するには２通りの方法があり，それらは一見物理的に全く異なるように見える．この２通りの方法の等価性が，ゲージ重力対応，すなわちゲージ理論（電磁気学やそれを一般化した理論）と重力理論の等価性，を導くのである．ゲージ重力対応の内容は後で詳細に述べるが，その一つの重要な性質は，異なる空間次元の理論が等価である（これをホログラフィーと呼ぶ）ということである．次元という一見確固とした概念が，物理理論的において初めから仮定するものではなく「出現する概念」であるということを意味している．

Dブレーンとは，一言で言えば，弦がその端を乗せることが許される空間のことであり，この定義から分かるように，その空間は全空間の一部であって，その次元を選ぶ自由がある．したがってDブレーンの種類はまずその次元によって分類される．弦理論に，弦以外の次元を持つ「物体」が導入されたのである．Dブレーンという部分空間が，実のところ運動できる「物体」であるのは，Dブレーンにくっついている弦の運動がDブレーン自体の運動を引き起こすからである．すなわち，Dブレーンは弦理論における物理的実体であり，弦理論に様々な次元を持つ物体が必然的に導入されるのである．Dブレーンのこのような導入は作為的なものではなく，論理的に必然である，ということが重要である．Dブレーンの存在を認めない

と，弦理論全体の構造に問題が生じてしまう．

もう一つ重要である点は，D ブレーンは，その存在が許されるだけではなく，実は弦よりも基本的であり得る，すなわち，「弦理論」の構成的要素となり得る，という点である．例えば，ある状況では弦と D ブレーンを入れ替える対称性が理論に存在している（厳密にはこれは予想であるが）．すなわち，様々な次元の D ブレーンが「弦理論」を定義するかもしれないのである．究極理論の基本構成要素は，従来の次元という概念を超えたものであると言えよう．

マルダセナ（J. Maldacena）の唱えたゲージ重力対応は，ある空間次元の電磁気学に類する理論（ゲージ場の理論）と，それとは異なる空間次元の重力理論が，等価である，と主張する[1]．対応は次元を超えた等価性である一方で，全く異なる種類の理論をつないでいるという重要性も持っている．すなわち，ゲージ重力対応の使用は，ゲージ場の理論の新しい解析手法なのである．本特集で詳しく述べられているように，素粒子の強い相互作用を記述する量子色力学（QCD）にゲージ重力対応を適用し，陽子・中性子や中間子の物理を QCD に等価な仮想的重力理論を用いて記述する，という驚くべき研究が近年活発になされている．これは，D ブレーンの重要性が認識される 1995 年以前の弦理論から眺めると，全く想像もできないような進展である．当時の弦理論は，すべての素粒子とその相互作用（重力を含む）を統一する統一理論の候補として認められていた一方で，その物理学としての存在意義，つまり現実の物理学との本当の関係，については，難しい問題を抱えたままであった．すなわち，弦理論はその魅力にも関わらず他の物理学分野との関連性は乏しかった．しかし現在，その頃の状況からは想像すらできないような発展に弦理論は包まれている．その発展の一つがゲージ重力対応である．様々なゲージ理論を解析する技術的な手法を導出する大きな枠組みとして，弦理論は新たな意義を手にしたのである．D ブレーンの力学の応用は，ゲージ重力対応を通じた QCD の解析にとどまらず，様々な種類・空間次元のゲージ場の理論の解析，例えば場の理論のソリトン・真空凝縮の新しい理解や幾何学的解釈，場の理論の新しい励起状態の予言，などを可能にしている．D ブレーンの重要性が弦理論において認識されたことは，統一理論としての弦理論自身の発展に大きく寄与しただけではなく，弦理論と他の物理理論との関係も一変させてしまった*1)．

QCD などへのゲージ重力対応の応用を含むこれらの発展的トピックは，非常に興味深くかつ新しい物理を提供しており，その詳細は本特集の他稿にゆだねる．本稿では，D ブレーンとは何か，そしてその力学的性質からゲージ重力対応がどのように導かれるかについて，概念的な点に重点を置いて解説する．ゲージ重力対応は，証明された対応原理ではない．その意味では「導く」というと論理的に語弊があるが，以下に見るように，D ブレーンの物理的意味を見れば至極自然に見出される対応なのである．ゲージ重力対応の正当性は，数々の理論計算結果によるチェックから疑いがない，ということは述べておくべきであろう．

2. D ブレーンとその力学

D ブレーンとは，開いた（端を持つ）弦がその端を乗せることが許される空間として定義される．弦どうしの相互作用が弱い場合の弦理論（「摂動的弦理論」と呼ばれる）は比較的良く理解されており，平坦な時空上を運動する弦の理論において理論の無矛盾性を要求すると，時空の次元が決まってしまう．ボソン型の最も簡素な弦理論の場合，それは時間も含めて 26 次元であり，超対称性を導入した超弦理論*2) だと 10 次元である．

ゲージ重力対応を導く，D ブレーンの 2 つの見

*1) ゲージ重力対応以外の D ブレーンの応用も含め，D ブレーンへの入門は拙著[2]を参考にされたい．

*2) 超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性である．超対称性のないボソン型弦理論では最も低い振動エネルギーの状態の質量の 2 乗が負になってしまうため，超対称性を導入した超弦理論を通常考える．本稿の以下の記述では超対称性について触れないが，前提として超弦理論を論じていると考えていただきたい．

方とは，次のようにまとめることができる：

(a) Dブレーンは弦の端が乗っている空間であり，開弦の振動によって現れる場（電磁場やその一般化であるゲージ場）がDブレーンの上を伝播できる．すなわち，Dブレーン上には電磁気学（ゲージ理論）が「住んでいる」.

(b) Dブレーンは閉じた弦を放出する源と解釈できる．閉弦の振動からは重力の伝播を司る重力子が現れる．すなわち，Dブレーンは重力の源，ブラックホールである．

この (a), (b) を以下で見てみよう．2通りの見方が同一のDブレーンを記述しているという事実が，ゲージ重力対応を導くのである[*3)]．

2.1 Dブレーンの上に住む理論

DブレーンのDは，ディリクレ型（固定端）境界条件を意味し，弦の端がある固定面上のみに存在できる条件を意味している．したがって，開弦はDブレーンから離れてゆく方向には直進できず，運動できるのはDブレーンに沿った方向のみである．Dブレーンの伸びている方向の空間次元を p とすれば，開弦の運動できる空間は p 次元である．このようなDブレーンは Dp ブレーンと呼ばれる．

開弦は無限種類の振動モードを持つが，それぞれのモードが1種類の粒子に対応することから，開弦は無限種類の粒子を一度に表す．開いた超弦の最も節が少ない振動モードは無質量の光子を表すことが知られている．光子は電磁力の媒介粒子であって，マクスウェルの電磁気学で表されるゲージ場である．節の多い振動モードからは弦の張力で決まる質量を持った粒子が現れるが，その張力が十分大きいと仮定すると（すなわち考えているエネルギーが十分小さいと仮定すると），無質量のゲージ場のみが登場人物となる．

これらを総合すると，Dp ブレーンの上には低エネルギーで $p+1$ 次元時空上のゲージ理論が乗っていることになる．例えば $p=3$ とすると，それは我々に馴染み深い $3+1$ 次元のマクスウェル理論である[*4)]．

Dブレーンが N 枚重なっていたとすると，開弦の端点は N 通りを区別する自由度を持つので，弦の両端を考えれば，N^2 通りの自由度を持つ．これがまさに非可換ゲージ理論と呼ばれる電磁気学の一般化をもたらす．ゲージ理論の指導原理であるゲージ対称性は，マクスウェル理論の場合は $U(1)$ であるが，このように N 枚のDブレーンが重なった場合，ちょうど $U(N)$ のゲージ対称性を持つ非可換ゲージ理論のゲージ場とその相互作用を，開弦は再現する[*5)]．

2.2 Dブレーンはブラックホール

Dブレーンに端を持っている開弦を考え，それが動く際の軌跡を時空内に描いてみよう（図1左）．時空図において弦の軌跡の描く膜のことを一般に世界膜と呼ぶ．世界膜は 1+1 次元部分時空を刷く．ここで，世界膜を少し変形し（図1右），更に世界膜の上の時間と空間（1次元）を入れ替えてみよう．すると，同じ世界膜ではあるが，解釈が変わる：閉弦がDブレーンから放出されることを意味するのである．すなわち，Dブレーンは閉弦の源である．

閉じた超弦の無限種類の振動のうち，最もエネルギーの低い振動モードは無質量粒子に対応する．それは重力を媒介する重力場と，ある種のゲージ場（ラモンラモン場[*6)]と呼ばれる）等をもたらす．これら閉弦から現れる場はDブレーンの場所にとどまる必要がないので，全空間を運動することができる．超弦理論では10次元時空全体である．

これらを総合すると，Dブレーンは低エネルギーでは重力場とラモンラモン場の源であるということになる．重力場の源は非常に重い物体であり，

---

*3) これら2通りの見方の等価性は，ブラックホールの自由度（エントロピー）の微視的な構成をも与え，ブラックホールエントロピーの公式（ホーキングらによる）の統計力学的導出にも用いられた．

*4) 正確にはマクスウェル理論の超対称版である．

*5) 相互作用が小さい場合の弦理論は，弦の上の対称性から，その振動状態がどのように互いに相互作用するかを決定する計算方法がある（具体的には，弦の 1+1 次元世界膜上の共形場理論を用いた記述である）．その方法に従って，振動している複数の開弦の散乱振幅を計算し，その結果を再現するような粒子の場の理論を書き下すことができる．

*6) ラモンラモン場は電磁場のテンソル的一般化である．

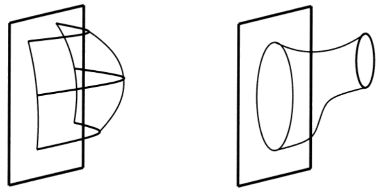


図 1　D ブレーンと弦の世界膜との関係．左：D ブレーンに端を持つ開弦が D ブレーン上を運動している様子．右：その世界膜を若干変形すると，D ブレーンから閉弦が放出されている世界膜の図となる．

今はそれがある場所に完全に局所化しているので，ブラックホールとなる．つまり D ブレーンはブラックホールであるのだ．

通常のブラックホールと異なるのは，D ブレーンは空間 p 次元に伸びているため，ブラックホールのように点状ではなく，長く伸びた「ブラック p ブレーン」となっていることである．また，ラモンラモン場の源にもなっており，荷電ブラックホールに類する．ブラックブレーンの（単位面積当たりの）質量も，D ブレーンが弦の境界を与えるという条件から導くことができ，ブラックブレーンの荷電の大きさも同様に導ける．このように，D ブレーンに対応するブラックブレーンが決まる．

3. ゲージ重力対応の自然な現れ

ある一つの物理的システムに 2 つの見方があるということは，その物理系に物を投げ込んだときの応答が 2 通りの仕方で記述できるということである．ゲージ重力対応は，まさにこの簡単な論理から自然に現れる．

ゲージ重力対応が主張する物理的な等価性は以下の通りである：

強結合でラージ N 極限の $SU(N)$ ゲージ理論のゲージ不変な演算子の相関関数は，超重力理論におけるブラックホールのホライズン近傍極限時空内の，重力子などの古典的伝播と等しい．

こう書くと若干難解に聞こえるが，実際の物理は以下で述べるように非常に簡明である．この主張は，D ブレーンに閉弦を投げ込んだときの応答について，先述の 2 つの D ブレーンの見方を用いて記述したときの結果が等しい，ということを言っているのである．以下，このことを見ていこう（図 2）．主張に含まれるラージ N 極限，相関関数，ホライズン近傍極限などの文言の意味も解説する．

まず (a) の見方では，D ブレーンは開弦がその端を乗せることのできる高次元膜である．D ブレーンに向かって投げられた閉弦は，D ブレーンに衝突すると，いくつかの開弦に生まれ変わるであろう．閉じていた弦が D ブレーンの表面と接触すれば，端点を D ブレーン上に生成して開くことができる．そうして生成した開弦は D ブレーン上を伝播し，またそれらが集まって閉弦を作り，D ブレーンから離れ飛び出してゆく．これが，開弦を経由する形の，D ブレーンに閉弦を放り込んだときの応答である（図 2 左）．

次に同じく閉弦を D ブレーンに放り込んだときの応答を (b) の見方で考えてみよう．D ブレーンは周囲の時空を曲げているので，D ブレーン近傍まで到達した閉弦は，曲がった時空の効果で進路が曲げられ，散乱されて戻ってくる，これが応答である（図 2 右）．先の (a) と比較すると，終状態として戻ってくる閉弦は同一であるが，中間状態の記述が全く異なっている．これが，ゲージ重力対応を生み出すのである．(a) の記述は開弦を経由しているのでゲージ理論側に対応している．入射した閉弦の状態に従って生成される開弦の状態が決定されるが，その決定の計算には平坦な時空内の D ブレーン上での弦の散乱振幅が用いられる．その結果，閉弦（重力子など超重力理論の場）と開弦（ゲージ場の複合演算子）の対応の「辞書」が得られる[*7)]．

入射する閉弦の数を多くすると，ゲージ理論側ではゲージ場の複合演算子の数が増え，多点相関

*7)　一般に複合演算子であるのは，一つの閉弦から生ずる開弦は一つとは限らないためである．例えば，重力場 $g_{\mu\nu}$ にはゲージ理論のエネルギー運動量テンソル $\sim F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}$ が対応する．ゲージ理論側での対応する演算子はゲージ不変な状態であるはずである：閉弦は開弦のゲージには依存しない．

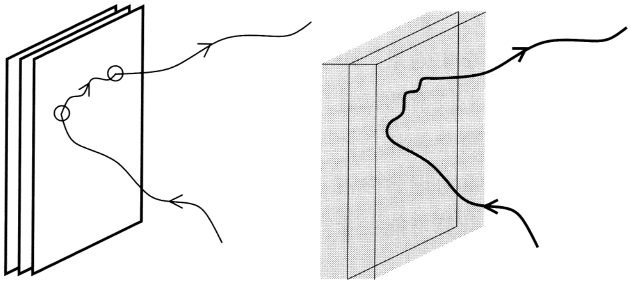


図 2　D ブレーンによって閉弦が散乱される 2 通りの解釈．左：閉弦が D ブレーンに衝突し（丸印），開弦に変わって D ブレーン上を伝播し，また閉弦に戻って飛び去る．右：閉弦が，D ブレーンの作る曲がった時空によって運動の経路を曲げられる．影をつけた領域（ホライズン近傍領域）では時空が強く曲がっている．

関数[*8)]をゲージ理論で考えていることになる．相関関数に現れるゲージ場の複合演算子の位置は，それぞれに対応する閉弦の入射する位置である．このように，D ブレーンの弦理論的理解が 2 通りあることから，ゲージ理論における複合演算子の多点相関関数と，ブラックホール近傍での重力モードの伝播（と相互作用）が，同一であることが示唆される．これがゲージ重力対応である．

非常に重要な点は，ゲージ理論は開弦に起因するので D ブレーンの上のみの物理である一方で，重力側の記述は全時空を自由に飛び回る閉弦に起因しており D ブレーンの時空次元より高次元であるということである．すなわち，ゲージ重力対応は，ホログラフィー（次元の違う物理系の等価性）の一例なのである．

場の量子論に親しみのある読者はゲージ重力対応を表現する相関関数の表式に興味を持つであろう．ここに GKP-W 関係式と呼ばれるゲージ重力対応の表現式を挙げておこう[3)]．

$$\left\langle \exp\left(\int d^4x\ g_0(x)\mathcal{O}(x)\right)\right\rangle_{\text{ゲージ理論}}$$
$$= \exp\left[-S_{\text{超重力理論}}[g]\right]_{g(r=\infty)=g_0}. \qquad (1)$$

右辺の g は重力場であり，r という D ブレーンから遠ざかる方向の座標の無限遠において g_0 という「境界値」となるように運動方程式を解いて選ばれる．右辺はその解を超重力理論の作用 S に代入したものである．一方左辺は，ゲージ理論において g に対応するゲージ不変複合演算子 $\mathcal{O}(x)$ の相関関数の生成母関数であり，演算子のソース係数として先の境界値 g_0 が用いられている．

4. ゲージ重力対応の成立条件

ゲージ重力対応が定理ではなく予想であるのは，今まで述べてきた「D ブレーンの 2 通りの見方」がどういう場合に本当に等価であるのかが明らかになっていないからである．例えば，(b) の曲がっている時空，と (a) の平坦な空間内に固定された D ブレーン，の 2 つがなぜ等価になり得るのか？その答えは現時点の研究では未だ明らかではない．しかし，前節で述べたような「導出」によってゲージ重力対応が成立するためには，少なくとも以下に記述する条件が必要である．

(b) では閉弦を放出する源はブラックホールであると述べた．しかし，弦理論は無質量状態に対応する振動モードとしての重力（とラモンラモン場）を持つだけではなく，質量のある無限種類の場を振動モードとして持っている．D ブレーンはこれらの場の源でもあり，したがって，ブラックホールを記述している通常の（超）重力理論が正当化されるためには，質量を持つ重い無限種類の場

*8)　相関関数とは，場の演算子 $\mathcal{O}(x)$ の相関を表す，場の理論の最も基本的な量であり，$\langle \mathcal{O}_1(x^{(1)})\mathcal{O}_2(x^{(2)})\cdots\rangle$ と書かれる．現れる演算子の数を n を用いて「n 点（相関）関数」と呼ばれる．場の量子論では，相関関数の陽な表式から，対応する粒子の散乱振幅が計算される．

の寄与が無視できる必要がある．また，量子重力の効果（重力子など閉弦がループをなす効果）が無視できないと，重力理論では事実上技術的に計算が大変困難となる．この2条件が満たされたとき，ゲージ重力対応の重力側で，超重力理論の古典的な計算が使用できる（すなわち計算可能となる）のである．

具体的な例として，D3 ブレーンの場合を考えよう．この例が最も重要であるのは，ゲージ理論側が4次元時空の（超対称）非可換ゲージ理論となるからである．ゲージ群が $SU(N)$ となるためには，N 枚の D3 ブレーンが平行に重なっている必要がある．このとき，それを源として作られる重力場は

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_0^2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2 + r_0^2 d\Omega_5^2 \quad (2)$$

となる（$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ は D3 ブレーンの伸びている方向であり，r と Ω_5 は D3 ブレーンに垂直な方向の極座標）．(2) では既に「ホライズン近傍極限」$r_0 \gg r$ をとった．この極限は，その式の示すとおり，ブラックホールの中心部に近い場所のみを考えるという極限である．重力場に現れる唯一のパラメータ r_0 は D3 ブレーンの枚数 N と重さ（弦の結合定数 g_s と弦の長さ l_s で表される）で決まる量である．先の2条件は，$r_0 \gg l_s, r_0 \gg l_{\rm P}$ を指す：前者は，重力場が極端に曲がっていないので弦の高い振動モードを励起する必要がないという条件であり，後者はプランク長さ $l_{\rm P}$（これも l_s と g_s を用いて書かれている）が十分 r_0 より小さいため量子重力効果が無視できるという条件である．これらを無次元量である N と g_s で書き直すと，

$$N \gg 1, \quad Ng_s \gg 1 \quad (3)$$

という2つの条件となる．第一の式は，ゲージ群の階数が大きいという「ラージ N 極限」を意味している．第二式において，g_s はゲージ理論の言葉では g^2，すなわちゲージ場の結合定数（電荷のようなもの）の2乗である[*9]．つまり，ゲージ理論側では，ラージ N 極限をとり，かつトフーフト結合定数 Ng^2 が強結合であるようなパラメータ領域が必要とされるのである．

ゲージ重力対応を用いる際に重力側での計算可能領域がゲージ理論側で強い相互作用を持つ場合に限定されるということは，悪く言えばこのゲージ重力対応を証明する術がほとんどないことを意味している．ゲージ理論側では結合定数による展開（摂動展開）が利用できないのである．しかし見方を逆にしてみると，ゲージ重力対応は，計算が困難であったゲージ理論の強結合領域を我々の手が届く領域に変えてくれているのである．これが，他稿で解説される，QCD（結合が強い）などへのゲージ重力対応の応用へとつながっていく．

5. D ブレーンの様々な力学とゲージ重力対応

ゲージ重力対応は，前節で解説したように非常に一般的な D ブレーンの性質から「導出される」対応であるので，そこで取り上げたような N 枚の D3 ブレーンが互いに重なっている場合以外の多種多様な D ブレーンの配位においても成立が期待される．実際，ゲージ理論との対応が明確なブレーン配位はよく研究されている．

例えば，N 枚のうち1枚が平行を保ちつつ他とは離れている場合は，重力側では離れた D ブレーンを時空を曲げない「プローブ」として扱えよう．このときゲージ理論側では $SU(N) \to SU(N-1) \times U(1)$ というゲージ対称性の破れに対応し，強結合領域において対称性の破れの物理を探ることができる．また，N 枚の D3 ブレーンに加えて，時空内でどの方向にも局所化した D ブレーン（「D インスタントン」と呼ばれる）を時空内に置くと，ゲージ理論側ではよく知られたインスタントンに対応することが知られている．非可換ゲージ理論におけるインスタントンの大きさは，重力側では D インスタントンが高次元時空内のどの場所にいるかという情報に取って代わる．更に，N 枚の D3 ブレーンに垂直に刺さっている D1 ブレーンはゲージ理論側でモノポールに対応し，垂直に刺さっている

*9) g_s は閉弦の結合定数で，開弦の相互作用定数の2乗である．開弦の散乱を表す世界膜を2つ持ってきて張り合わせると，閉弦の散乱を表すからである．

基本弦はクォークに対応する．この対応を使うと，強結合のゲージ理論におけるクォーク・反クォークの間のポテンシャルエネルギーや，モノポール・反モノポールの間のそれを，重力側では曲がった時空内のD1ブレーンや基本弦の形状を求めることで計算することができる．

本稿ではゲージ理論側が「現実的な」4次元時空となるようD3ブレーンのみを取り上げたが，他の次元のDブレーンを採用すれば，様々な次元のゲージ理論についてのゲージ重力対応が得られることは明白である．このように，ゲージ重力対応は多種多様なゲージ理論の性質，特に量子補正が大きく寄与するような強結合の領域の性質の解析に光を照らした．Dブレーンの生成消滅や衝突・相互作用・結合状態など，Dブレーンの更に多様な力学が明らかになりつつある現在，今後それらにゲージ重力対応が広く深く適用され，ゲージ理論と重力理論の裾野が広がり新たな物理的意味が解明されていくことは間違いない．

しかし，重要な未解決課題は存在している．それは，ゲージ重力対応の証明である．ゲージ重力対応が成立していると期待する必要不可欠な事実として，ゲージ側と重力側での対称性の一致，がある．超弦理論においてD3ブレーンを N 枚重ねた場合，その上のゲージ理論は高い超対称性に加えて共形対称性を持つ*10)．この対称性は，重力側では重力場 (2) を変えない対称性（アイソメトリーと呼ばれる）として実現されている．すなわち，超対称性がなかったり共形対称性を持たないようなゲージ理論では，対称性による縛りが低く，ゲージ重力対応が成立しているかどうかはより不明確である．このような場合に実験的にゲージ重力対応を試してみることが，QCDへのゲージ重力対応の応用の意義にもなっている．本特集の他稿には，ゲージ重力対応の証明に関する話題が述べられているので，参考にしていただきたい．

本稿で述べたゲージ重力対応はいわゆる「弱い形」の対応であり，より強い主張が成立していると考えられている．その主張とは，ホライズン近傍極限の曲がった時空内で運動する閉弦そのものが（すなわち低エネルギー極限をとらないので，すべての振動モードを含む閉弦が）ゲージ理論と等価であるという主張である．この「強い意味」でのゲージ重力対応が正しければ，弦理論の（強結合領域を含む）摂動的でない一般的な記述の確立という目標に向けて，ゲージ重力対応は一歩踏み込んでいることになる．Dブレーンの力学とゲージ重力対応の今後の発展に期待したい．

*10) 具体的には，共形対称性が $SO(2,4)$ であり，それに加えてR対称性と呼ばれる超対称性に起因した対称性 $SO(6)$ が存在している．前者の対称性は重力場 (2) の初項と第二項のアイソメトリー，後者は第三項のそれである．共形対称性を持つ場の理論は共形場理論（conformal field theory, CFT）と呼ばれ，重力場 (2) の初めの二項が反ドジッター（anti de Sitter, AdS）時空を表すことから，ゲージ重力対応はしばしばAdS/CFT対応と呼ばれる．

参考文献

1) J.M. Maldacena: The Large N limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252.
2) 橋本幸士：『Dブレーン—超弦理論の高次元物体が描く世界像』，東京大学出版会 (2006).
3) S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov: Gauge theory correlators from noncritical string theory, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114;
E. Witten: Anti-de Sitter space and holography, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291.

（はしもと・こうじ，理化学研究所仁科加速器研究センター）

弦理論とQCD



酒井 忠勝・杉本 茂樹

1. はじめに

我々が大学院に入学したのは，弦理論の激動の時代（弦理論の第二革命）の幕開けの頃でした．その頃は，誰もがびっくりするような大発見が相次いでなされ，あれよあれよという間に，弦理論と場の理論の分野の様相がすっかり様変わりしてしまったのを印象深く覚えています．今回の特集のテーマであるゲージ重力対応も，そんな大発展の時期の最中に発見され，それまでの伝統的な場の理論の常識を大きく覆しました．当初は，現実世界とはやや離れて純粋に理論的な興味から研究されることが多かったのですが，最近ではいよいよ現実の系に適用して，実験値と比較することでこの理論の正しさを検証しようというところまで来ています．ここでは，特に，強い相互作用の理論として知られるQCDを解析する試みについてお話したいと思います．

2. QCDとは？

この世に存在する様々な物質は原子が組み合わさってできていて，その原子は良く見てみると，陽子と中性子がいくつか固く結びついてできた原子核とその周りをぐるぐる回っている電子からなっているということはご存知でしょう．ここで，陽子はプラスの電荷を持っている粒子で，中性子は電荷を持っていない粒子なので，単純に考えたら，原子核は簡単にばらばらに壊れてしまいそうですね．しかし，陽子や中性子には，電気の力よりももっと強い力が働いていて，そのために互いに引き合い，くっついているのです．そのような力がどのようにして生じるのかを解明したのが，湯川秀樹の中間子論です．彼は，中間子と呼ばれる別の粒子が存在し，この粒子が陽子と中性子の間を飛び交うことで力を伝えているということを予言しました．この予言は後に確かめられ，今ではいろいろな種類の中間子が見つかっています．後で，パイオン，ρ メソン，a_1 メソンといった名前の付いた中間子が出てきますので，ちょっと覚えておいてください．

1960年代中頃になると，陽子や中性子はアップクォーク（u）やダウンクォーク（d）と呼ばれるもっと小さな粒子が組み合わさってできたものであることが分かってきました．陽子はアップクォーク2つとダウンクォーク1つからなり，中性子はアップクォーク1つとダウンクォーク2つからなっています（図1）．アップクォークは電荷が $+2/3$ で，ダウンクォークは電荷が $-1/3$ であるような粒子です．電荷が分数になっているのがやや奇妙です

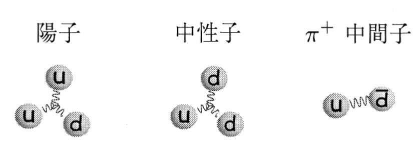


図1 クォークモデル．

が，こう考えると正しく陽子の電荷が +1 で，中性子の電荷が 0 になることが分かりますね．このようにクォークが3つ組み合わさってできた粒子はバリオンと呼ばれています．一方，中間子はクォークと反クォークがペアになってくっついてできたものであることが分かりました．例えば，パイオンのうち +1 の電荷を持つ π^+ と呼ばれる中間子はダウンクォークの反粒子（$\bar{\mathrm{d}}$）とアップクォークとがくっついてできたものです．このようにクォークがいくつかくっついてできたバリオンや中間子のような粒子のことをハドロンと呼びます．

これらのクォークの間には非常に強い力が働いているために，陽子や中性子をバラバラにしてクォークを単体で取り出すことはできません．この力のことを単に“強い力”と言ったり，少しかしこまった言い方をして“強い相互作用”と呼んだりします．この強い力も，上で触れた湯川秀樹のアイディアと同じような原理で，クォークの間をある粒子が飛び交うことによって生じます．その粒子は，ちょうどクォークどうしを糊付けする（英語で glue）ような役割を果たすため，グルーオンと呼ばれています．

素粒子の間に働く力には，今のところ，この強い力に加え，弱い力と呼ばれる力，電磁気力，重力の4種類があることが分かっていますが，ここでは，強い力に関係する物理現象に注目したいので，当面はその他の力は無視することにして，強い力が働かない電子やニュートリノのような粒子は考えないことにします．こうして得られる，クォークとグルーオンからなる理論を QCD と呼びます．この QCD は日本語では，量子色力学（Quantum Chromo Dynamics）と呼ばれている理論です．この理論にはゲージ対称性と呼ばれる対称性があり，グルーオンはその対称性のために存在が要請される粒子であることが示されます．一般に，そのようなゲージ対称性を持つ理論をゲージ理論と呼び，その対称性のために要求される力を媒介する粒子のことをゲージ粒子と呼びます．実は，不思議なことに，上で述べた4つの力のうち，重力を除く3つの力はいずれもゲージ理論によって記述されることが知られています．例えば，電磁気力に登場するゲージ粒子は光の粒子である光子です．電荷を持つ2つの粒子の間に働く電磁気力も，光子がその間を飛び交うことで生じるという仕組みになっています．本当は重力もある種のゲージ理論とみなすことができ，重力を媒介する重力子という粒子がそのゲージ粒子であるということも言えるのですが，いろいろな意味で他の3つの力とはずいぶん性質の異なる理論であるため，この解説では，重力理論はゲージ理論とは呼ばないことにします．

3. 弦理論の奇妙な歴史

さて，話を弦理論に移しましょう．弦理論と呼ばれる理論は，一言で言うと，物質の最小単位は粒子ではなく，ひも状をしているという仮説に基づく理論です．この弦理論にもいくつかの種類があって，特に超対称性と呼ばれる対称性があるものを超弦理論と呼んだりしますが，ここでは特に区別せずに単に弦理論と呼ぶことにします．この弦理論は，重力を含むあらゆる相互作用を統一する究極の統一理論の最有力候補と考えられ，世界中の多くの研究者によって盛んに研究されています．

しかし，実は，弦理論は元々は量子重力理論や統一理論を作ろうと思って発明された理論ではないのです．この理論は，強い相互作用の理論として QCD が確立するよりも前に，ハドロンを記述する理論を模索する過程で発見されました．ハドロンがひも状をしていると仮定すると，様々な種類のハドロンをひもの様々な振動モードとして統一的に記述することができ，しかも実験的あるいは理論的に知られていたハドロンの性質のいくつかをうまく満たすことが分かったのです．しかし，この考え方はすぐに困難にぶつかりました．良く調べてみると，時空の次元が 10 次元でないとうまく定式化できないなど，実験と矛盾することがいろいろと出てきてしまうことが分かったのです．そうこうしているうちに，QCD が確立し，ハド

ロンを記述する基礎理論はQCDであると人々が信じるようになるにつれて，ハドロンを記述する理論としての弦理論はあまり顧みられなくなりました．

一方，弦理論をさらに詳しく調べていくと重力が含まれていることや，大統一理論に非常に近い構造が自然に出てくることが分かり，ハドロンの理論というよりは，自然界に存在するあらゆる素粒子とその相互作用を統一的に記述する究極の統一理論として期待されるようになりました．これは大体1980年代半ばに分かってきたことで，その頃に起こった弦理論の革命的な発展のことを人々は弦理論の第一革命と呼んでいます．

それから大体10年後，1990年代半ばになって，弦理論に更なる革命（第二革命）が起こりました．今度は，Dブレインと呼ばれる膜状の物体が弦理論に含まれることが分かったことをきっかけに，弦理論の理論的な構造の理解が飛躍的に進み，それまで全く予想もされていなかった弦理論の新たな姿が現れることになります．残念ながらここでこの頃の発展の詳しい解説をする余裕はありませんが，特に重要だったことを一つ挙げるなら，このDブレインの上に様々なゲージ理論が実現されることが分かったことだと思います．これによって弦理論とゲージ理論の間の関係が一気に親密なものとなり，弦理論を使ってゲージ理論を解析したり，あるいは逆にゲージ理論の知識を使って弦理論の解析をしたりすることが可能になったのです．今回の話で特に重要な役割を果たすゲージ重力対応もこの頃に発見されたもので，ここでもやはりDブレインが本質的な役割を果たします．

4. Dブレインとゲージ重力対応

ゲージ重力対応とは何かについてはこの特集の中でも多くの方々が様々な観点から解説されているので，詳しい解説は省略しますが，後で必要になるのでここでも少しだけ説明しておきましょう．もう，ゲージ重力対応については他の方の解説で満足したという方はこの節は飛ばしてさっさと次の節に進んで下さい．

このゲージ重力対応を一言で言うと「ゲージ理論とある種の曲がった時空における弦理論（重力理論）が等価である」という主張です．この主張は実に驚くべきもので，初めてこれを見た人は誰しも「そんなばかな」と思うのではないでしょうか．ゲージ理論と弦理論は，見かけ上，全く異なる理論です．しかも，この対応において，ゲージ理論が定義される時空の次元は弦理論が定義される時空の次元と異なるのです．例えば，ゲージ理論は4次元（空間3次元と時間1次元）の時空で考えたとしても，それに対応する弦理論は前節で触れたように10次元時空で定義された理論です．このように，見かけ上，全然違う理論なのだけれど，詳しく調べると実は理論の内容が全く等価であるということを主張しているのです．

ここで，何故このような対応が成立すると予想されるのか，雰囲気だけでも理解して頂くために，少し解説してみましょう．前節で触れたように，Dブレインという物体が鍵となります．Dブレインにはいろいろな次元のものが存在しますが，時間方向と p 次元空間の方向の $(p+1)$ 次元に広がったDブレインをDp ブレインと呼びます．例えば，$p=3$ の場合を考えれば，4次元的に広がっているものです．Dブレインの基本的な性質は，弦の端点がその上に存在できるということです．弦理論に登場する弦には図2のように，端のない輪ゴムのような形をした閉弦と端のある開弦の2種類があるのですが，このうちの開弦の端点はDブレインの上にのみ存在することができます．つまり，Dブレインがあると，その上に開弦がくっつくことができるわけです．前節で，弦の様々な振

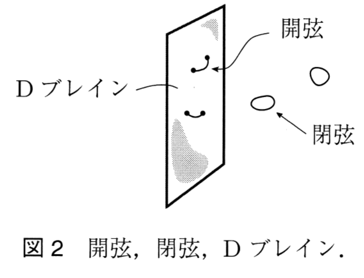


図2　開弦，閉弦，Dブレイン．

動モードは様々な粒子に対応することに触れましたが，実は，閉弦からは重力子，開弦からはゲージ粒子が生じるということが示せます．したがって，特にDブレインの上にはゲージ理論が実現されることになります．さらに，理論のパラメータをいじってある極限操作をすると，閉弦との相互作用を切って，開弦から生じる質量の軽い粒子だけからなるゲージ理論を取り出すことができます．

一方，Dブレインは質量を持った物体なので，一般相対論の教えからすると，周りの時空を曲げます．逆に，時空の曲がり具合でDブレインの性質を特徴付けることができると考えるのはそれほど不自然なことではないでしょう．例えば，一般相対論で，ブラックホールのようなものを考えるときには，その性質は完全に時空の曲がり具合で特徴付けられますが，そのようなものだと思ってください．先ほど，Dブレインは開弦がくっつくことができる物体であると言いましたが，そのような物体を考える代わりに，このDブレインを曲がった時空で表そうとすると，曲がった時空における弦理論を考えることになります．ここで，上のゲージ理論を得るための極限操作は，Dブレインが置かれていた位置の近傍を拡大するような操作に対応しており，そういう操作を経て得られるような曲がった時空を考えることになります．

ここで，一つのDブレインに対して，開弦がくっつく板と曲がった時空という2つの見方をしましたが，どちらも同じDブレインを表しているので，上記のような操作で結果として得られるゲージ理論と曲がった時空における弦理論は等価であるということが予想されるわけです．

5. ゲージ重力対応からQCDへ

さて，このゲージ重力対応は，果たして現実の世界を考える上で何かの役に立つのでしょうか？

1997年にマルダセナがゲージ重力対応を最初に唱えた当初は超対称性や共形対称性という特殊な対称性のあるゲージ理論が主な考察の対象で，現実世界を記述するゲージ理論とはややかけ離れた印象があったのですが，すぐにそういった対称性がない場合にも応用され，様々な解析がなされました．例えば，ヤン・ミルズ理論（グルーオンだけからなる理論）に対して，ゲージ重力対応を用いて解析する方法が提案され，大型計算機を使った数値解析の結果とゲージ重力対応による計算結果がかなり良く合うことが確かめられたりしました．

しかし，現実の世界にさらに近づくには，グルーオンだけではだめで，どうしてもクォークを導入する必要があります．そうやってQCDに対応する弦理論の記述が得られれば，弦理論の予言が実験で確かめられる道が開けるのです．これが特に重要であることには，2つの理由があります．一つは，ゲージ重力対応が超対称性や共形対称性のない場合にどのくらい有効であるかを調べる貴重な情報が得られることです．他のゲージ理論では，通常はゲージ理論側で大変困難な計算を実行しなければ，重力理論側の計算結果と比較することができないのですが，QCDの場合にはゲージ理論側の計算を全くサボっても，重力理論側の計算と実験値とを直接比較することでどのくらい合うのかを議論することができるわけです．もう一つは，逆にこのゲージ重力対応を利用することによって，ハドロンの物理に対してQCDを用いた伝統的な解析法とは全く異なる新しい強力な解析手段を与え得ることです．弦理論を用いることで，QCDをまともに解析するのでは手が出ないような様々な物理量を計算することが可能になり，強い相互作用に関わる様々な現象に対して新たな予言をすることができるようになる可能性があります．

そのような流れを受けて，我々は2004年の暮れに，弦理論によってQCDを解析する方法を提案しました[1)]．せっかくなので，具体的な構成法を少しだけ説明しましょう．弦理論が定義されている10次元時空の座標を x^μ $(\mu = 0 \sim 9)$ と書きます．ここで，x^0 が時間方向で，(x^0, x^1, x^2, x^3) が我々の住む4次元時空の方向に対応する座標です．まず，x^μ $(\mu = 0 \sim 4)$ の方向に広がったD4ブレインを考えます．このままでは5次元的に広がっているので，4次元時空を実現するために，x^4 の方

向を円状に丸めます．このD4ブレインにくっついた開弦からゲージ粒子が出てきますが，これがグルーオンと解釈されます．このとき，この x^4 の丸め方を少し工夫すると，グルーオン以外の粒子は重くなって，低エネルギーでは純粋にグルーオンだけの理論とみなせることが示せます．さらに，この系にクォークを加えればQCDが完成するわけですが，そのために，x^μ $(\mu = 0 \sim 3, 5 \sim 9)$ の方向に広がったD8ブレインを加えます．そうすると，開弦の2つの端のうちの片方がD4ブレイン，もう片方がD8ブレインに乗っているような状態を考えることができます．詳しい解析をすると，そのような弦からクォークの自由度が出現することが示せるのです．このようにして，QCDを弦理論の枠内で実現することが可能になりました．

さて，こうして構成したQCDに対して，前節で解説したゲージ重力対応の考え方を用いたらどうなるでしょうか．前節の話によると，ゲージ理論を構成するときに用いたDブレインを，対応する曲がった時空に置き換える操作をすることで，曲がった時空における弦理論による記述が得られるはずです．このDブレインに対応する曲がった時空というのは，具体的には弦理論の運動方程式を解いて見つけないといけないので，ちゃんと求めるのは一般にかなり難しい問題です．実は先ほどQCDを構成するときに用いたD4ブレインとD8ブレインが共存する系に対応する解は未だ求まっていません．ただ，D4ブレインのみの場合の解は具体的に知られています．そこで，D4ブレインだけを曲がった時空に置き換えて，D8ブレインは曲がった時空に埋め込まれたDブレインとして扱うことにします．

このような取扱いが正当化されるのは，QCDの言葉で言うと，カラーの数 N_c がフレーバーの数 N_f よりも十分に大きい場合です．カラーというのは，QCDのゲージ対称性の大きさに比例する量で，現実のQCDの場合は $N_c = 3$ であることが分かっています．また，フレーバーの数はクォークの種類の数なのですが，今の構成法では質量がゼロであるようなクォークを考えているので，質量が無視できるような，十分軽いクォークの数を数えると，現実のQCDではアップクォークとダウンクォークの2種類になるので，$N_f = 2$ です．$N_c = 3$ が $N_f = 2$ よりも十分に大きいとみなせるとはなかなか思い難いので，この近似はかなり荒っぽい近似と言わざるを得ません．したがって，定量的な計算結果はかなりの誤差が入ることを覚悟しなければいけないはずなのですが，後で述べるように，実際にやってみると実験値とのずれは思いのほか小さく，予想以上に良い近似になっているようです．

何はともあれ，これでQCDに対応する弦理論の側の記述が得られました．今の場合，曲がった時空にD8ブレインがある状況を考えているので，10次元時空を漂う閉弦に加えてD8ブレインにくっついた開弦も共存しているような系です．この記述から，QCDで予想されていることがどのくらい読み取れるでしょうか？ まず，この理論からどのような粒子が出てくるかを考えてみます．閉弦の自由度は，D8ブレインがあろうとなかろうと存在するものなので，クォークからできたものではありません．したがって，グルーオンから構成される結合状態だと考えられます．そういう粒子のことをグルーボールと呼びます．D8ブレインにくっついた開弦は，ちょうど図1の中間子と似た形に見えます．実際，後で述べるようにこの開弦から生じる様々な粒子が，実際に観測されている様々な中間子に対応すると解釈されます．では，バリオンはどうでしょうか？ 実は，バリオンは，弦ではなく，球状をしたD4ブレインに対応することが示されます．今の時空では，$x^{5\sim9}$ で張られる5次元空間の動径座標 u には下限があって，この u が最小値を取る部分は4次元球面をなします．この4次元球面に巻きついたD4ブレインを考えると，これは我々の住む $x^{0\sim3}$ の時空では点粒子として振る舞います．この粒子がバリオンとして解釈されるのです．さらに詳しく調べると，このD4ブレインには N_c 本の開弦の端がくっついていないといけないことを示すことができ，図で表すと図3のような形になります．これは図1のバリ

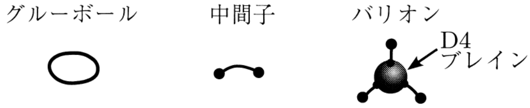


図3 弦理論によるハドロンの記述．

オンと良く似た形になっていることが分かると思います．

これだけではありません．ここでは，あまり詳細には踏み込めませんが，これらのハドロンの質量や相互作用も含めて，実験で観測されている事実をかなりうまく再現することが見て取れます．例えば，ρ メソンと呼ばれる中間子と a_1 メソンと呼ばれる中間子の質量の比を弦理論に基づいて計算すると，$m_{a_1}/m_\rho \simeq 1.53$ という値になります．実験値は1.59 くらいですので，かなり近い値が出ました．それから，π^+ 中間子の大きさ（電荷の広がり具合）を表す量も計算してみると，その計算結果は 0.690 fm（フェムトメートル）になりました．実験値が 0.672 fm ですので，これも驚くほど良く一致しています．他にも様々な物理量について計算を実行することができ，相互作用の強さや中間子の質量などは概ね 20～30% の誤差の範囲内で，実験値と良く合っていることが分かります．上で触れたように $N_c \gg N_f$ を仮定したり，クォークの質量を無視したり，いろいろと荒っぽい計算をしているはずなので，これは予想以上に良く合っていると言うことができます．

6. 弦理論は何の理論か？

弦理論は元々ハドロンを記述する理論として誕生したのですが，その後，その地位はQCD に取って代わられ，弦理論は量子重力を含む究極の統一理論の候補と長い間思われてきました．それが，最近になって，ゲージ重力対応というアイディアを使うと，弦理論が再びハドロンを記述する理論として復活するということが分かったわけです．かつて，ハドロンを記述する理論としての弦理論には，時空が10次元になってしまったり，質量ゼロの重力子などが出てきてしまって，4次元時空に住むハドロンの性質と矛盾するという困難があったのですが，これがDブレインや曲がった時空を導入することで，もはや問題ではなくなりました．

ここで，注意したいのは，弦理論はQCDに取って代わるというわけでもなく，またQCDを解析するための単なる道具というわけでもないということです．ゲージ重力対応は，ゲージ理論と曲がった時空における弦理論が等価であることを主張しています．この主張がどれだけ正しいのかはまだはっきりとはしていませんが，もし正しいとすると，弦理論はQCDと等価な理論になり得るということを言っているわけです．まだ，今のところ，強い相互作用に関わる部分しか議論していませんし，QCDに関してもまだ近似的に現実的な状況を再現できたという段階なので，弦理論がこのような形で自然界を完全に記述する理論として成り立つのかどうかは分かりませんが，素粒子の理論の新たな可能性を垣間見させてくれます．

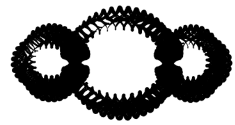
一方で，量子重力を含む究極の統一理論の候補としての，より伝統的な弦理論の可能性が否定されたわけでもありません．今は，弦理論の様々な可能性を追求し，この理論の向かうべき方向性を探る時期とも言えるかも知れません．これまでも，そうした研究の過程で多くの驚くべき発見がなされ，周辺分野に絶大な影響を与えつつ，また弦理論自身の解釈も何度も大きく変わってきました．これほど豊富な内容を持ち，人々を驚かせ続けてくれる理論が存在すること自体が驚異と言えるでしょう．これからこの理論がどのような運命をたどるのか，我々に何を教えてくれるのか，今後の展開に注目しましょう．

参考文献

1) T. Sakai and S. Sugimoto, *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843 (2005); *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1083 (2006)

（さかい・ただかつ，茨城大学理学部）
（すぎもと・しげき，名古屋大学大学院理学研究科）

ゲージ重力対応と強い相互作用



夏梅　誠

1.「場違いな」研究者たち？

この数年，原子核物理の分野は活況を呈していて，世界各地で毎月のように国際会議が開かれています．一つの理由は，あとで説明する「クォーク・グルーオン・プラズマ」を実現する実験，相対論的重イオン衝突型加速器 RHIC（Relativistic Heavy Ion Collider，発音は「リック」）が運転を開始したからです．ところで，これらの会議ではしばしば奇妙な現象が見られます．それは，「場違い」とも思える研究者，超弦理論の研究者が参加していることです．超弦理論は，自然界の4つの力すべてを統一する最有力候補の理論だとされています．その超弦理論の研究者が，原子核物理の会議で一体何をしているのでしょう？ 実は，超弦理論の研究者は決して場違いというわけではありません．超弦理論の研究者も原子核物理の研究者も，「強い相互作用」を理解したいという共通のゴールがあるからです．そこで，ここでは超弦理論と強い相互作用の関係について書いてみたいと思います．

2. 強い相互作用の研究はなぜ必要か？

強い相互作用の理論，QCD（量子色力学）が提案されてから30年以上になります．そもそも，なぜ強い相互作用の研究が今でも必要なのでしょうか？ QCDのラグランジアンは一行で書けるシンプルなものです．しかし，30年以上たった今でも，十分に理解されているとは言えません．

素粒子物理学は他に類を見ない精密科学です．例えば，QED（量子電磁気学）の結合定数，微細構造定数の場合，理論と実験は10桁もの精度で確かめられています．実に100億分の1という精度ですが，「標準模型」の中でもQCDに関わる部分は様子が違っています．QCDでも精度よく比較ができる部分もありますが，それは一部の領域で，大部分の領域では精度が悪く，数分の1程度の誤差は当り前です．

この問題は既存の現象をQCDで理解するときに無論問題になりますが，新しい物理を探る上でも問題になります．例えばセルンのLHCは今年から運転が開始されますが，LHCは陽子・陽子コライダーなので実験結果の解釈には強い相互作用の理解が欠かせません．「標準模型」の他の部分が精密に検証されているということは，逆に新しい物理を見つけるのも困難で精密測定が欠かせないことを意味します．このような状況の中で，QCDが十分に理解できていないことは問題になり得ます．

このようにQCDの理解が不十分なのは，強い相互作用という名前の通り，相互作用が強く摂動論の使える領域が限られているからです．QCDは高エネルギーで相互作用が弱くなることが知られています（漸近的自由）．このため，深部非弾性散乱と呼ばれる高エネルギーでの実験結果とQCDを精度よく比較することができ，QCDが検証さ

れました．一方，低エネルギーでは相互作用が強くなり，クォークやグルーオンはハドロンと総称される粒子の中に閉じこめられ，ばらばらに取り出すことはできないと考えられています．しかし，このように相互作用が強い場合，QCD は十分には理解できていません．実際，クレイ数学研究所によって発表された「ミレニアム問題」の一つとして，閉じこめの問題には現在100万ドルの賞金がかけられています（2000年5月24日発表）．ミレニアム問題は数学の未解決問題のうち，重要と思われるものを集めたもので，それから100年さかのぼった「ヒルベルトの23の問題」にならったものです．

しかし，強結合で摂動論が使えないという状況は，逆に QCD では QED などよりずっと豊かな現象が期待できることを示唆します．実際，QCD は豊かな相構造を持つことが知られており，いまだに相構造の全体像は知られていません（図 1）．この図で「ハドロン相（閉じこめ相）」の部分が，クォークが閉じこめられている相です．

一方，高温では多数の軽い粒子が励起され，それらが邪魔してクォークどうしに働く力が弱められます．これは電磁気学でも知られた「デバイ遮蔽」と呼ばれる現象です[*1]．この効果で非閉じこめが起きた相が，クォーク・グルーオン・プラズマです．この相の存在は理論的には以前から知られていました．しかし，このプラズマは実験室で創り出されたことがなかったものですし，ましてやその物理的性質など測られたことはありませんでした．RHIC はこのプラズマを実現して物理的性質を測ろうという初めての本格的な実験です．

プラズマ相では非閉じこめが起こっているので，一見すると摂動論が有効だと思われがちです．確かに，十分な高温ではこのプラズマは自由ガスのように振る舞います．しかし，現在の実験で実現しようとしている温度では，相互作用は十分に弱くはなりません．なぜなら QCD の結合定数は，エネルギーについて対数的に弱くなるだけだから

*1） ただし QCD の場合，遮蔽されるのは電荷ではなく「カラー電荷」です．

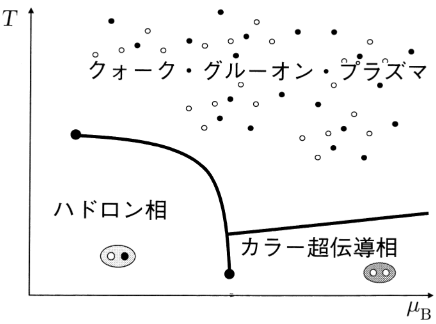


図 1　QCD の相図[1)]．縦軸は温度，横軸はバリオン化学ポテンシャル．これは模式図であり，他の相の存在の可能性についても相の境界についても，わかっていないことが多い．

です（$1/\log E$）．このためプラズマの性質を理論的に議論したくても，摂動論的 QCD の有効性はやはり限られています．そこで，やはり違う手段が求められています[*2]．

さて，このような各種の相構造を判断する一つの基準として，クォーク・反クォーク間のポテンシャルが使えることが知られています．そこで，本稿ではこのポテンシャルを通して，超弦理論が各相をどう記述するのかを説明します．

3. なぜ超弦理論？

超弦理論の研究者も強い相互作用に大きな関心を寄せています．これは何もミレニアム問題の賞金に興味があるからではありません．

超弦理論が強い相互作用と関わりを持つのは，意外でも何でもありません．超弦理論は，60年代の終わりから70年代の初めにかけて，そもそも強い相互作用の理論として産声を上げたからです．もっとも，実験結果が集まるとともに超弦理論では不満な点が明らかになり，QCD が正しい理論であることがわかったため，この試みは挫折しました．

*2） なお，強結合で有用な手法としては格子数値計算があり，コンピュータの発達などから近年，特に有力になってきています．しかし，実時間形式ではなく虚時間形式であることから，この手法は平衡状態のような定常的な問題には強力ですが，RHIC 実験のような非定常的な問題は不得意としています．

一方，超弦理論は重力も含めた統一理論として再出発することになりました．しかし，それでも超弦理論は何らかの形で強い相互作用と関わりがあるという信念を超弦理論の研究者はずっと持ってきましたし，その方面での研究も続けてきました．これは単なる「意地」ではありません．定性的に多くの成功を収めたこと，そして実際的な御利益もあったからでしょう．つまり，摂動論的QCDが苦手とする領域こそ，強い相互作用の弦理論的な描像がよく成り立つ領域なのです．したがって，超弦理論と強い相互作用の関係が明らかになれば，強い相互作用を理解する上で，超弦理論とQCDは相補的な役割を担うことができるからです．

例えば，クォークと反クォークでできたメソンは，クォーク対をつなぐ「ストリング」でうまく表すことができます（図2）．このストリングは張力を持っています．したがって，クォーク対を引き離すには，ストリングの長さLに比例したエネルギー$E \propto L$が必要になり，クォークを単独で取り出すことはできません．ストリングに注入したエネルギーが十分大きくなると，中間にクォークと反クォークが対生成されます．しかし，1本のストリングが2本にちぎれてしまうだけで，ストリングの端点にはやはりクォークがついているという意味で，クォークを単独で取り出すことはできません．このように，ストリングはクォークの閉じこめを自然に説明します．

また，QCDが登場したと言っても，QCDは強い相互作用としての超弦理論と相入れないものではありません．つまり，通常の力線は空間的に拡がっていきますが，クォーク・反クォーク間の力線は広がらず「フラックス・チューブ」をなすと考えられています．少なくとも，このフラックス・チューブの太さが無視できる場合は，メソンのストリング模型に帰着すると考えるのは自然です．

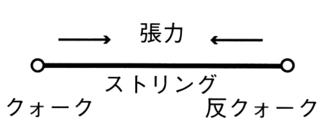


図2　ストリングを使ったメソンのモデル．

このように，強い相互作用の物理と超弦理論はうまく対応しますが，多くの問題もありました．特に

問題1　ストリングを矛盾なく量子化するには，高次元時空が要求されます．ボソンだけのストリングの場合は26次元時空，フェルミオンも含んだストリングは10次元時空ではないと無矛盾になりません．

問題2　クォークをつなぐストリングとして閉じこめは記述できましたが，QCDで出てくるのは閉じこめポテンシャルだけではありません．クォーク間の距離が小さくなれば，フラックス・チューブの太さが無視できなくなり，通常の力線に似てきます．その結果として，ポテンシャルはクーロン型になります（$E \propto -1/L$）．しかし，単純なストリング模型では，この効果は記述できそうにありません．またプラズマ相では，熱的に励起されたクォーク・反クォーク対によって，ストリングがちぎれやすくなってデバイ遮蔽が起こります．ここでもやはり，ストリングによる記述は適切ではなくなるように思えます．つまり，ストリング模型は閉じこめのモデルにすぎないように思えます．超弦理論が確かにQCDを表すのなら，相図の全体が議論できるべきでしょう．

このような問題から，強い相互作用と超弦理論の対応には，明らかに何か欠けた点がありました．これらの問題を部分的に解決したのが，「ゲージ重力対応」という考えです．ゲージ重力対応によると，ゲージ理論に対応するのは，実は平坦な時空での超弦理論ではありません．むしろ曲がった時空での超弦理論です．典型的な例では，この時空は5次元反ド・ジッター時空（以下AdS）として知られているものです．

曲がった時空を導入することで，なぜ上記の問題が回避できるのか見てみましょう．まず問題1ですが，曲がった時空の場合でも全体としては10

次元時空になっています*3)．もっとも，AdS 時空は，部分空間として 4 次元の平坦な時空を含みます．この部分空間が，ゲージ理論の住む時空として同定されます．曲がった高次元時空と言っても，4 次元の平坦な時空に住むゲージ理論とは矛盾しないのです．

4. 曲がった時空でのクォーク・ポテンシャル

4.1 基本的な考え方

次に問題 2 に移りましょう．ゲージ重力対応でのクォーク・ポテンシャルの基本的な考え方を理解するために，まずゲージ重力対応の一番簡単な場合，AdS 時空を考えます．そして，QCD の短距離で出てくるようなクーロン・ポテンシャルが，曲がった時空から出ることを見ます．

図 3 は AdS 時空を模式的に描いたものです．水平方向はゲージ理論の住む 3 次元空間の 1 つを表し，垂直方向は AdS 時空の動径方向を表します．動径方向は，適当な座標 r で $r=0$ から $r=\infty$ まで拡がっていますが，図示する都合上縮めて描いています．クォーク自体は，$r=\infty$ に住むとされます．

AdS 時空は曲がっているので，線素は単純に平坦なものではなく

$$
\begin{aligned}
& ds^2_{\mathrm{flat}} = -dt^2 + dx^2 + \cdots \\
\rightarrow\ & ds^2_{\mathrm{AdS}} = r^2(-dt^2 + dx^2 + \cdots) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と r^2 の因子がかかっている点が特徴です*4)．ゲージ理論での時間・長さは t, x の値で測られます（つまり r^2 の因子をかけない）．しかし，これは曲がった時空本来での線素とは違うという点がポイントです．ゲージ重力対応の多くの効果は，このことだけから理解できます．

クォーク間の距離を L とします（$\Delta x = L$）．ゲージ重力対応でも，クォーク・ポテンシャルはクォークをつなぐストリングによって表されます．一見すると，この場合でもクォークを $r=\infty$ で水平に伸びたストリングでつなげれば良さそうに思えます（図 4）．しかし，これではストリングの長さは最短にはなりません．曲がった時空では，座標間隔が必ずしも本当の距離（固有長さ）を表すわけではないからです．この図は固有長さを適切に表してはいないので，この点注意が必要です．実は，AdS 時空の場合，いったん時空の内部（$r \neq \infty$）に入ったほうがストリングの固有長さは短くなります*5)．

詳しい解析によると，このストリングは大雑把に言って 2 つの部分に分けられます．第一の部分はほぼ垂直に伸びた部分で，第二の部分はむしろほぼ水平に伸びた部分です．したがって，ここでは簡単化のために，このストリングを近似的に長方形のストリングで置き換えることにしましょう（図 5）．このうち，クォーク・ポテンシャルに相当するのは，第二の部分です．クォーク間の距離 L を拡げたときに変化するのはこの部分だからです．一方，垂直部分はあまり変化しないので，この部分は他のクォークとは無関係で，元々クォークが持つ質量を表していると考えることができます．

ポテンシャルを計算するには，もう少し情報が必要です．まず，実際に計算するとストリングの下端 $r = r_{\mathrm{min}}$ は

$$r_{\mathrm{min}} \propto 1/L \qquad (2)$$

となります（図 6）．また式 (1) から 2 つの帰結が考えられます．第一に，水平方向の固有長さは rL なので，ストリングのエネルギーも

$$E_{10} \propto rL \qquad (3)$$

となります．第二に，このエネルギー E_{10} は 10 次元時空の立場でのエネルギーで，ゲージ理論の立場でのエネルギーではありません．式 (1) にあるように，時間方向にも r^2 がかかっているから

*3) 全体としての時空は AdS と 5 次元球面との直積です．5 次元球面は単に全体の次元を 10 に合わせるためだけにあるのではなく，重要な役目を担っています．

*4) 以下の議論では，r 方向の線素の具体形は必要ないので省略してあります．

*5) x 方向の線素には r^2 の因子がかかっているので，原点近くのほうが固有長さ $r\Delta x$ は短くなります．

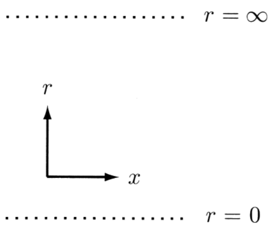


図 3　模式的に描いた AdS 時空.

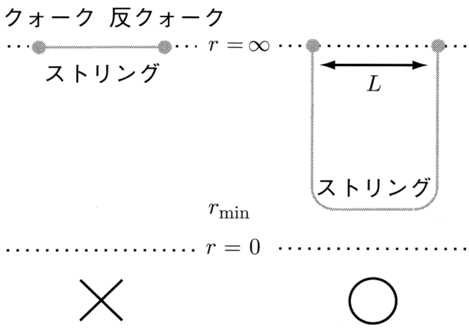


図 4　水平に伸びたストリング (左) は最低エネルギー状態ではなく, AdS 時空の内部に入ったものが最低エネルギー状態になる.

です. ゲージ理論の立場での時間はあくまで t なので, E_{10} をゲージ理論のエネルギー $E_{ゲージ}$ に直してやる必要があります. 一般相対論の言葉では, この因子 r^2 は重力赤方偏移を表します*6). 式 (1) から, 10 次元での固有時間 t_{10} とゲージ理論の時間 t の間に $t_{10} = rt$ の関係が成り立つので, エネルギーの関係はこの「逆」つまり

$$E_{ゲージ} = rE_{10} \tag{4}$$

となります. そこで最終的にほしいポテンシャルは式 (2) も使って

$$E_{ゲージ} = r_{\rm min} E_{10} \propto r_{\rm min}^2 L \sim O(1/L). \tag{5}$$

このようにクーロン型のポテンシャルとなり*7), 閉じこめポテンシャル $E \propto L$ にはなりません. つまり, 曲がった時空を使うことで超弦理論でも

*6) ブラックホールの場合, この赤方偏移から地平面近傍では時間がゆっくり進むように見えるといった一見奇妙な振舞いが出てきます (4.2 節).

*7) 本当のクーロン・ポテンシャルなら $E \sim -1/L$ となるはずですが, この方法では符号までは再現できません. これは, ストリングを粗っぽく図 5 のように近似したためです.

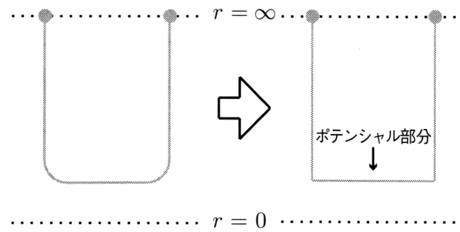


図 5　クォークをつなぐストリング (左) を近似的に長方形のストリングで表す (右). 水平に伸びたストリングのエネルギーが, クォーク・ポテンシャルを表す.

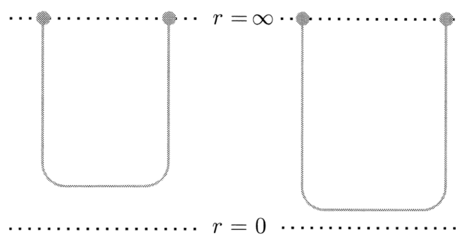


図 6　クォーク間の距離を変えたときのストリングの振舞い. L を大きくすると, ストリングの下端 $r_{\rm min}$ は $r_{\rm min} \propto 1/L$ のように下がってくる.

非閉じこめポテンシャルを記述できることがわかります.

後ほど必要になるので, メトリックが式 (1) 以外の場合でのポテンシャルを求めておきましょう. これまでの議論を一般の場合でくり返すことで, エネルギーは

$$\boxed{E_{ゲージ} = \sqrt{-g_{00}}E_{10} \propto \sqrt{-g_{00}g_{xx}}L} \tag{6}$$

となることがわかります. ただしメトリックには, ストリングが水平に伸びた場所でのものを使います. 式 (1) の場合, 式 (6) から式 (5) が出てくることを確かめてみてください.

4.2 閉じこめ相

一方, ゲージ重力対応は, 昔の超弦理論が定性的に記述した閉じこめポテンシャルを記述することもできます. 実は, 単純な AdS 時空は QCD ではなく, $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論と呼ばれる理論に対応します ($\mathcal{N}$ は超対称性の数). $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論には, 温度ゼロでも閉じこめ相が存在しないことが知られています. 先ほどの計算

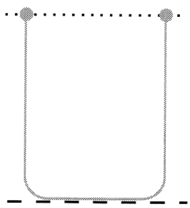


図7 切り取られたAdS時空の場合，クォーク間の距離が大きくなるとストリングは空間の端 $r=r_0$ に到達してしまう．

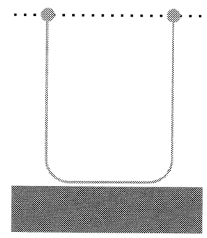


図8 プラズマ相の場合．$r=0$ から $r=r_h$ の部分はブラックホールを表す．

ではクーロン・ポテンシャルしか出てこないのはこのせいです．QCDに近い理論を記述するには，単純なAdS時空を修正する必要があります．

ゲージ理論が変われば，どのような曲がった時空が必要なのかについてはいろいろな場合で知られていますが，ここでは議論を単純化するために簡単なモデルを使いましょう（図7）．このモデルは，$r=\infty$ から $r=0$ まで拡がったAdS時空を $r=\infty$ から $r=r_0$ までで切り取ったものです．

時空をいじったとは言え，ストリングが空間の端 r_0 から十分離れている場合は，影響はありません．4.1節と同じでクーロン・ポテンシャルが出てきます．しかし，クォーク間の距離 L が大きくなると新しい効果が生まれます．

先ほど，AdS時空ではストリングの下端は $r_{\min} \propto 1/L$ となりました．しかし，この切り取られたAdS時空の場合，L が十分長くなると，ストリングは $r=r_0$ に達してしまいそれより先には行けません．したがって，水平に伸びたストリングのエネルギーは 式(6)から

$$E_{ゲージ} = r_0^2 L \sim O(L) \tag{7}$$

となり，確かに閉じこめポテンシャルが出てきます．

このように，ゲージ重力対応は昔の超弦理論の利点を生かしながら，その欠点を補うことができるのです．

4.3 プラズマ相

次に有限温度，つまりプラズマ相に移ってみましょう．ゲージ重力対応によると，有限温度のゲージ理論に相当するのは単純なAdS時空ではなく，ブラックホールのいるAdS時空です（図8）．どうしてブラックホールが有限温度のゲージ理論に対応するのか詳細は省きますが[2,3]，一つの理由はブラックホールも有限温度系だからです．ブラックホールは量子効果により温度を持ちます（ホーキング輻射）．さらに，ブラックホールの性質は熱力学の第ゼロ法則から第三法則と同じ形でまとめることができます．このため，ブラックホールも通常の熱力学量で指定できます．

有限温度の場合は，$r=r_h$ にブラックホールの地平面があります．もっとも，この場合もブラックホールから十分離れていれば近似的にAdS時空なので，ポテンシャルはクーロン型になります．しかし，ストリングが地平面に到達すると新しい効果が生まれます．

ブラックホールの場合，時間方向の線素が地平面近傍で特徴的な振舞いをします．このため，E_{10} と $E_{ゲージ}$ の関係(4)が修正されます．これを理解するには，普通のシュワルツシルド・ブラックホールを使えば十分です．シュワルツシルド・ブラックホールの場合，時間方向の線素は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_h}{r}\right)dt^2 + \cdots \tag{8}$$

であり，地平面 $r=r_h$ で g_{00} がゼロになります．このことは t を時間として使う遠方の観測者の立場では，地平面近傍での時間は止まって見えることを意味します．あるいは，地平面近傍ではエネルギーがゼロになるように見えます．

今の場合も同じで，実際，式(6)から

$$E_{ゲージ} \sim 0 \tag{9}$$

となります．水平方向のストリングはエネルギー

には寄与しないということですが，このことはクォーク間に力が働かないことを意味します．結局，クォークを十分離してしまうと，クォーク間に力が働かないことになります．これがゲージ重力対応によるデバイ遮蔽です．

5. クォーク・ポテンシャルの再来

前節で説明したポテンシャルの議論は，1998年にゲージ重力対応が本格的に唱えられてから2週間もしないうちに提案され，1カ月もたたないうちに様々な拡張も試みられました．ところが，それから8年もたった2006年になって，このような単純な議論に再度スポットが当てられています．

もっとも，何か本質的な部分で変更があったわけではありません．1998年当時，このような計算はゲージ重力対応の証拠の一つとしてなされており，実際の応用を念頭に置いたものではありませんでした．超対称ゲージ理論は現実のQCDとは違うので，そのような計算を応用するにあたって心理的な抵抗もあったのでしょう．しかし，RHIC実験などで観測される状況に応じて，様々な効果を真剣に計算してみようという試みが，最近では果敢に行われています．

2節で触れたように，プラズマ相でも摂動論的QCDはあまり有効な手法ではありません．このため，まずプラズマ相に特有の現象は何かが議論の焦点の一つになってきました．現在までに議論されている現象としては

1. 小さな「ずり粘性」.
2. ジェットの抑制 (ジェット・クエンチング).
3. J/Ψ 抑制.

などがあります．どの現象も超弦理論の枠内で議論されるようになりました（現象1については文献2,3)，現象3については文献3,4) を参照).

例えば，ジェットの抑制を見てみましょう．ハドロンの散乱では，しばしば「ジェット」が生成されます．ジェットはほぼ同じ方向に生成された多数のハドロンです．しかし，ジェットがプラズマ中にできるとジェットのエネルギーが媒質に吸収され，ハドロンの観測数が抑制されます．これがジェットの抑制です．

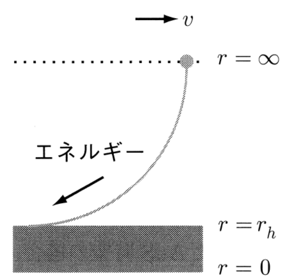


図9　ゲージ重力対応によるジェットの抑制.

これまではポテンシャルを考えるために，静的なクォークを考えてきました．しかし，この効果の場合，クォークがどうエネルギーを失っていくのかに興味があります．したがって，今度はクォークを表すストリングを x 方向に速度 v で動かすことにしましょう（図9)．すると，ストリングは図のようにたなびきます．ストリングがたなびくのは，ブラックホールにエネルギーが渡されるためです．したがって，ストリングが失ったエネルギーをクォークがプラズマ中で失うエネルギーだと解釈することができます．

この提案は4つのグループから独立にされ，1週間のうちに相次いで論文が出ました．また，その週のうちからこれらの提案を拡張する試みもなされ，大いに盛り上がったようです．ただ，同時に安易な論文やいい加減な論文も少なくなかったようです．

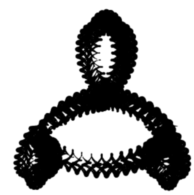
本稿執筆にあたり，共同研究者で原稿を読んでいただいた岡村隆氏（関西学院大学）に感謝します．

参考文献

1) T. Hatsuda, arXiv:hep-ph/0702293.
2) 夏梅誠,「ブラックホールとクォーク・グルーオン・プラズマ」数理科学 2006年7月号；夏梅誠,「超弦理論とクォーク・グルーオン・プラズマの『予期せぬつながり』」日本物理学会誌 2007年9月号.
3) M. Natsuume, "String theory and quark-gluon plasma," arXiv:hep-ph/0701201.
4) M. Natsuume, *Nature Phys.* **3** (2007) 297.

（なつうめ・まこと，高エネルギー加速器研究機構）

ホログラフィーと宇宙



白水 徹也

1. はじまりはブラックホール

ブラックホールが一般相対論におけるアインシュタイン方程式の解として発見されたのが1916年のことである．解があまりにも特異な形をしているため，しばらくの間忘れ去られていた不遇の時代もあった．しかし，今やブラックホールは宇宙物理学，素粒子理論の中心的話題を提供するトップスターの地位を確立し，特異なものの中では勝組みの部類に属するであろう．

1970年代に著しく発展したブラックホール研究の中で，その後素粒子理論と深い関わりを持つことになったものは，ブラックホール熱力学，ならびにホーキング輻射であろう．その中でもブラックホールのエントロピー S なるものがブラックホールの事象の地平面の面積 A に比例しているという事実（$S=kc^3A/4G\hbar$）の発見は衝撃的であった．ここで k はボルツマン定数，c は光の速さ，$\hbar$ はプランク定数，G はニュートンの重力定数である．

通常，ある3次元空間内のエントロピーはその空間の体積に比例し，空間の体積が2倍になれば，エントロピーも2倍となるような量である．なぜ，体積ではなく面積なのか？ ブラックホール自体は3次元的なものである．3次元的な情報と思っていたものが2次元的な情報で特徴づけられているのである．また，エントロピーはそもそも微視的な状態数で評価されることを思い出すと，事象の地平面付近の量子場，あるいは超弦理論による説明が当然議論されるであろう．実際に1990年代中頃のDブレーンの発見以降理解が飛躍的に進むことになった．また，このブラックホールエントロピーが任意の有限体積を持つ系の上限を与える可能性も指摘されている（ホログラフィック原理）．ブラックホールが宇宙で存在する最も情報を蓄積できる物体というわけである．

さて，超弦理論で登場するブラックホールは帯電しており，超対称性の要請から，「電荷」の大きさと質量の大きさは等しい．電磁力と重力がつり合うように調整されているのである．このブラックホールの事象の地平面近傍の構造は実に面白い．例えば4次元の帯電ブラックホール解の場合，2次元反de Sitter（adS）時空と呼ばれる負の宇宙項を持った時空と2次元球面の直積からなる．Maldacenaが超弦理論におけるホログラフィーの具現化としてのadS/CFT対応を発見する過程において，この性質は重要な役割を果たしている．

本稿では，宇宙やブラックホールにまつわるホログラフィーの話題をいくつか絞って解説を行いたい．各節はほぼ独立に読めるように書いたつもりである．一部を除いて自然単位系（$\hbar=1$, $c=1$）を採用している．

2. ホログラフィック原理[1)]

ある有限の体積の中のエントロピーの中で最大の

エントロピーを持つ系はいかなるものであろうか．

2.1 ブラックホールが一番？

ある有限体積の領域を考えてみよう．その特徴的なサイズを R とし，温度を T とすると，その中のエネルギー E とエントロピー S は

$$E \sim R^3 T^4, \quad S \sim R^3 T^3 \tag{1}$$

で与えられる．ここで S を E と R で書き直すと

$$S \sim R^{3/4} E^{3/4} \tag{2}$$

となる．これまでのところブラックホールを一言も持ち出していない．今からこの系がブラックホールでないための条件について考えてみよう．素朴には物質をある狭い領域に閉じ込めることによってブラックホールが形成されると予想される．今の場合，エネルギー E を持つ塊を考えているわけであるが，これは光速を c とすると質量 E/c^2 から決まるシュバルツシルト半径 $2GE/c^4$ よりも大きなサイズ R，すなわち

$$R > 2GE/c^4 \tag{3}$$

を満足していればブラックホールが形成されることはないであろうと考えるのである．シュバルツシルト半径とは球対称ブラックホール解の半径であり，質量が M の場合，$2GM/c^2$ で与えられる．さてこの条件式 (3) を式 (2) に当てはめてみると，S に対して条件

$$S < G^{3/4} R^{3/2} \sim (R/L_{\rm pl})^{3/2} \tag{4}$$

を得る．ここで $L_{\rm pl} \sim G^{1/2}$ はプランク長．よって R がプランク長よりも大きければ，上限値 $(R/L_{\rm pl})^{3/2}$ は同じサイズのブラックホールのエントロピー $S_{\rm bh} \sim R^2/G \sim (R/L_{\rm pl})^2$ よりも小さくなる，すなわち，

$$S < (R/L_{\rm pl})^{3/2} < S_{\rm bh}. \tag{5}$$

したがって，同じサイズ R の物体がある場合，情報を詰め込むだけならブラックホールを選んだほうがお得であるということになる．これが**ホログラフィック原理**である．上限値が体積ではなく面積で決まっている点に注意されたい．

この議論には確認しなければならない点がいくつもある．例えば，物体の形をほぼ球体としたが，扁平した場合や，さらに形が複雑な場合はどうなっているのか．上の議論でブラックホールの形成条件が重要であった．領域を表す不変的な幾何学量は体積であろう．この 1/3 乗が典型的なサイズを表すが，それを用いてブラックホールの形成条件とするかは慎重な議論が必要である．この類の問題は一般相対論では昔から議論されており，Kip Thorne によって提唱された Hoop（輪）仮説がしばしば取り上げられている[2]．大まかには輪で測定した物体の「ウエスト」や「身長」が，シュバルツシルト半径よりも大きければブラックホールは形成されないとする仮説である．現在でもこの仮説に関する研究が細々とではあるが絶えず続いている．

2.2 宇宙とホログラフィック原理

次に宇宙についてこの原理を考えてみよう．まず宇宙のトポロジーが自明で大域的に空間が平坦な場合を考えてみよう．物質が空間全体に存在するので，全体のエントロピーを考えることは意味がないであろう．そこで膨張宇宙での特有のサイズを与える**宇宙の地平面の面積**とその中に含まれる物質のエントロピーの大小関係について議論するのが試行錯誤の第一段階として考えられる．

宇宙の物質として $p = w\rho$ を満たす完全流体を考える．ここで p は圧力，ρ はエネルギー密度である．w は定数（輻射の場合 $w = 1/3$，圧力を無視できるダストの場合 $w = 0$）．宇宙膨張を表す時空の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2). \tag{6}$$

ここで t は宇宙時間，$a(t)$ は宇宙の「大きさ」を表すスケール因子，$d\Omega_2^2$ は 2 次元球面の微小面積要素．$a(t)$ の時間依存性はアインシュタイン方程式を解くことによって決まり，$a(t) = (t/t_{\rm pl})^{\frac{2}{3(w+1)}}$ で与えられる．ここで $t_{\rm pl} \sim G^{1/2}$ はプランク時刻である．この時刻で $a(t_{\rm pl}) = 1$ となるようにスケール因子を規格化している．以上で宇宙の地平面の定義の準備が整った．

宇宙の地平面，特に粒子的地平面と呼ばれる長さは，宇宙誕生（宇宙時間 $t = 0$）から時刻 t までに光が到達し得る距離として定義される．上の座

標で観測者が原点 $r=0$ にいるとすると，光の軌道に沿って $-dt^2+a^2(t)dr^2=0$ が満たされる．この式から光が伝播できた座標距離 $r_H(t)$ を計算することができる．この距離を固有距離に焼き直せば，宇宙の地平面のサイズが評価できるというわけである．その結果

$$l_H(t)=a(t)r_H(t)=a(t)\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \sim t. \quad (7)$$

したがって，宇宙の地平面の面積は $A_H(t)\sim t^2$．一方，エントロピーは

$$S_H(t)\sim l_H^3 T^3 = G^{-3/2} r_H^3(t) \propto \left(\frac{t}{t_{\rm pl}}\right)^{\frac{3w+1}{w+1}}. \quad (8)$$

ここで温度 T が $a(t)$ に逆比例していること（$T\sim G^{-1/2}a^{-1}(t)$）を用いた．以上の結果からエントロピーと面積の比が

$$S_H(t)\sim \frac{A_H(t)}{G}(t/t_{\rm pl})^{\frac{w-1}{w+1}} \quad (9)$$

となる．したがって，$|w|<1, t>t_{\rm pl}$ で $S_H(t)<A_H(t)/G$ となっていることが分かり，ホログラフィック原理が成り立っている．すなわち，宇宙の地平面内の物質のエントロピーは地平面の面積を G で割ったもので抑えられている．

一方で閉じた宇宙模型を考えてみよう．この場合は厄介である．このときの時空の計量は

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)(d\chi^2+\sin^2\chi d\Omega_2^2) \quad (10)$$

で与えられる．χ は 0 から π までの値をとる．平坦の場合と同様に宇宙の地平面の面積 $A_H(t)$ とエントロピー（体積に比例）を求めるとそれぞれ

$$A_H(t)=4\pi a^2(t)\sin^2\chi_H, \quad (11)$$

$$S_H \propto a^3(t)\int_0^{\chi_H} d\chi \sin^2\chi\, T^3 \propto \chi_H-\cos\chi_H\sin\chi_H. \quad (12)$$

したがって，エントロピーと面積の比は

$$S_H/A_H \propto \frac{\chi_H-\cos\chi_H\sin\chi_H}{a^2(t)\sin^2\chi_H} \quad (13)$$

と評価される．しかし，この表式の右辺の分母を見れば分かるように $\chi_H\to\pi$ の極限で発散してしまう．これは宇宙の地平面の大きさが赤道面を超えると減少する一方で，地平面が囲む体積は単調増加するという事実に起因している．それでは閉じた宇宙の場合，ホログラフィック原理は成り立たないのだろうか．

そこで提案されたのが Bousso による共変エントロピーである[1)]．まず領域を囲む 2 次元面を考え，そこから放たれる収束する光の束を考える．ここで「収束する」とは 2 次元面の面積が光の進行に従って減少することを意味するものとする．例えば平坦な時空においては球面から発する未来向きで内向きの光の束と過去向きで内向きの光の束に該当する．各々，未来と過去に向かって収束し，球対称の 2 次元面から発された場合は一点で交わることは想像に難くない．この光の束が描く光的な 3 次元面上でエントロピーが何らかの方法で定義され計算できるとし，そのエントロピーが面積で抑えられることを提案したのである．なかなか挑戦的な提案である．閉じた宇宙に対してこの提案に従うと，$S_H \propto \int_0^{\chi_H-\pi} d\chi \sin^2\chi$ となり，$\chi_H\to\pi$ の極限でゼロとなる．したがって，S_H/A_H がその極限で有限値となり，ホログラフィック原理の体裁を保つことができる．

この Bousso による提案での大きな問題点は，光的な 3 次元面上のエントロピーの具体的な定義がない点である．ただし，このエントロピーの局所流に対して条件を課すことによって，大域的なエントロピーへの上限が存在を証明することができる[3)]．

2.3 インフレーション宇宙におけるブラックホールエントロピーの上限

これまでの議論には定義や設定などに曖昧さがあり，研究の流れが散漫になる傾向がある．しかし，その中でも幾何学的に定義が明確な量については数学的に厳密な証明が可能であろう．例えば，古くはブラックホールの面積増大定理が挙げられる．古典的にブラックホールの事象の地平面の面積は減少することはない．これは永久不滅に正しい結果である．ブラックホールのエントロピーが面積に比例するので，この定理が熱力学の第二法則に相当している．

では，宇宙のホログラフィック原理に関連した何

か定理の体裁を保つことができる重要な帰結を出すことは可能であろうか．素朴にはブラックホールのサイズが宇宙の地平面よりも小さいことが期待される．なぜなら宇宙の地平面よりも広がった物質は自己重力による崩壊よりも宇宙膨張による「拡散」が優位であるからである．つまり，ブラックホールの事象の地平面の面積と宇宙の地平面の面積との大小関係が標的となり得ないだろうか．各々定義は明確である．実はこの大小関係を正の宇宙項が存在する場合に証明することができる．そして，最大の情報量を持ち得ると期待されたブラックホールにも限界が存在することが分かるのである．実はホログラフィーとは異なる文脈でこの大小関係の証明が宇宙論分野で議論されていたのである[4]．何かの役に立つかもしれないので，以下ではその証明の概略を紹介しよう．

まず，事象の地平面自体は定義が大域的であるため，それ自身の面積に関する不等式などを直接議論することは難しい．そこでブラックホールの特性を調べ，事象の地平面の代用物でしかも扱いやすい対象物を考えるのがよい．ブラックホールの重要な性質の一つに事象の地平面の中に捕獲面が存在することが挙げられる．捕獲面上から発される未来向きかつ外向きの光の束の面積はその軌道に沿って減少する．その微小面積要素の単位時間当たりの減少率を θ_+ と書くことにする．減少する場合 $\theta_+ < 0$ となるように符号を選んでいる．平坦な時空内の球面から発される光の束の面積は通常増大することを思い起こせば，この捕獲面の存在から重力の強さがいかにすさまじいものかが想像できるであろう．

さて，事象の地平面の中には2次元面のとり方の自由度からいろいろな捕獲面があることを想像できると思うが，その中でも一番外側の面を考えることとしよう．そこでは捕獲されるか，しないかの際と考えられるので，その面上で $\theta_+ = 0$ であるであろう．一方で，事象の地平面上で面積は増大することが知られているので，事象の地平面上で $\theta_+ \geq 0$ が成り立っているはずである．したがって，$\theta_+ = 0$ の面は事象の地平面よりも内側にあることが予想される．なぜなら，θ_+ は重力の強い所で負，弱い所で正に漸近する傾向があり，ブラックホールの外に行くに従って，負から正に変化すると考えられるからである．また，ブラックホールの未来向きの時間発展で漸近的に定常になり，面積の増大がストップする．つまり，事象の地平面上で長時間追えば $\theta_+ \to 0$ となる．これは未来に向かって $\theta_+ = 0$ の面と事象の地平面が一致することを意味する．**したがって，$\theta_+ = 0$ の面積について上限値が存在することを示せば，事象の地平面の面積についても上限値の存在が言えたことになる．**

次に今からの議論の中で中心的役割を果たす交差収束方程式を説明しよう．その方程式は

$$\dot{\theta}_+ = -\theta_+\theta_- + e^{-f}\Big(\frac{-{}^{(2)}R}{2} + \tau_a\tau^a + {}^{(2)}\nabla_a\tau^a\Big) + 8\pi G\rho + e^{-f}\Lambda. \quad (14)$$

ここで左辺の・は**光の未来向きかつ内向きの光的方向**の微分である．θ_- は未来向きかつ内向きの光の束の単位時間当たりの微小面積の変化率．f や τ^a の詳細な定義は今重要でないが，f が座標の任意性の自由度からくる実スカラー関数，τ^a が空間的な実ベクトル場であることだけに留意していただきたい．${}^{(2)}R$ と ${}^{(2)}\nabla$ はそれぞれ2次元面上の Ricci スカラーと共変微分である．ρ は物質のエネルギー運動量テンソルの $(+,-)$ 成分，すなわち流束密度であり，$\rho \geq 0$ と仮定してよい．Λ は正の宇宙項である．

さていよいよ証明の本体．式 (14) の両辺に e^f を掛けて $\theta_+ = 0$ の面上で積分することを考えてみよう．左辺を右辺に移項，右辺第二項の大きな括弧の中の第一項と宇宙項の項を左辺に移項すると，

$$\frac{1}{2}\int dS\,{}^{(2)}R - \Lambda A_{\rm ah} = \int dS\Big[-\dot{\theta}_+ + \tau_a\tau^a + 8\pi G\rho\Big] \quad (15)$$

が得られる．$A_{\rm ah}$ は $\theta_+ = 0$ の面の面積．${}^{(2)}\nabla_a\tau^a$ の積分は境界のない2次元面上の積分であることから落ちる．ここで右辺の符号について吟味して

みよう．第二項と三項は正である．τ_a は空間的ベクトルであるからその大きさは正である（今，計量の符号は $(-,+,+,+)$ と選んでいる）．第一項も実は正である．なぜなら，$\theta_+ = 0$ の面のすぐ内側には $\theta_+ < 0$ の捕獲面があると考えられるため，$\dot{\theta}_+ < 0$ であるとしてよい．結局，

$$\frac{1}{2}\int dS^{(2)}R - \Lambda A_{\rm ah} \geq 0. \tag{16}$$

宇宙項が正の場合，$\int dS^{(2)}R$ も正でなければならず，2 次元面についてガウス・ボネの定理から 2 次元球面であることが帰結され，$\int dS^{(2)}R = 8\pi$ と決まる．したがって，$\theta_+ = 0$ の面の面積 A に対して不等式

$$A_{\rm ah} \leq 4\pi/\Lambda \tag{17}$$

が得られることが分かった．繰り返しになるが，ブラックホールの面積は増大し，漸近的に $\theta_+ = 0$ の面積に一致する．上記の不等式は任意の時刻で成り立つので，ブラックホールの面積 $A_{\rm bh}$ への上限，$A_{\rm bh} < 4\pi/\Lambda$，を与える．$4\pi/\Lambda$ は宇宙項を持つ de Sitter 時空解の宇宙の地平線の面積（$A_{\rm dS} = 12\pi/\Lambda$）の 3 分の 1 になっている．一般に宇宙の地平線の面積を A_c と書くと，十分時間が経った後に不等式，$A_{\rm bh} + A_c + (A_{\rm bh}A_c)^{1/2} \leq 12\pi/\Lambda = A_{\rm dS}$ が成り立つことが示されている[5]．

3. ブレーン宇宙とホログラフィー

adS/CFT 対応の宇宙論版がある．状況証拠が存在する程度に留まるもののなかなか興味深く，本稿で紹介するに値するものと考える．まず，簡単な状況証拠を挙げよう．通常の adS/CFT 対応は，adS 時空上の重力理論とその無限遠方上の量子場との間の等価性について主張する．「無限遠方」の次元は反 de Sitter (adS) 時空の次元よりも 1 次元低い．この対応において「無限遠方」を考えることがポイントであったが，有限の距離にある境界上で考えるとどうなるであろうか．この設定は 1999 年に Randall と Sundrum によって提案されたブレーンワールド模型からも動機付けされる[6,7]．以下の小節では，まず準備としてブレーン宇宙について必要な箇所についてのみ解説を行い，次にブレーンワールドにおける adS/CFT 対応の状況証拠を紹介したい．

3.1 ブレーン宇宙

この模型では境界面にブレーンがあるとする．より正確には時空全体が 5 次元の負の宇宙項 Λ をアインシュタイン重力理論に支配されているとし，ブレーン上にはその張力を担う真空エネルギー σ と物質（そのエネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$，μ,ν は 4 次元時空上のテンソル場の成分を表す）が存在するとする．このとき，ブレーン自身による自己重力を考慮することによってブレーン上の重力の方程式が以下のように書ける[8]．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + 4\pi G_4 T_{\mu\nu} + \kappa^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}. \tag{18}$$

ここで $g_{\mu\nu}$ はブレーン上の 4 次元時空の計量，$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル，$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ は Ricci スカラー，κ^2 は 5 次元の重力定数，$\Lambda_4 := (1/2)\kappa^2(\Lambda + \kappa^2\sigma^2/6)$ は 4 次元の正味の宇宙項，$G_4 := \kappa^4\sigma/48\pi$ は 4 次元のニュートンの重力定数*1)．$E_{\mu\nu}$ は 5 次元のワイルテンソルのある成分であるが，後で重要となる性質は，その 4 次元トレース部分が消えることである（$E_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$）．$\pi_{\mu\nu}$ は重要なので，その表式を書いておくことにする．

$$\pi_{\mu\nu} := -\frac{1}{4}T_{\mu\alpha}T^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{12}TT_{\mu\nu} + \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T^{\beta}_{\alpha}T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{24}g_{\mu\nu}T^2. \tag{19}$$

無限の余剰次元模型では低エネルギー，あるいは長波長で $E_{\mu\nu}$ や $\pi_{\mu\nu}$ からの寄与が無視できることは確認されている．

3.2 ホログラフィー

以上でブレーン宇宙におけるホログラフィーを考察する準備が整った．簡単のために，以下の議論では $\Lambda_4 = 0$ としブレーン上の時空として一様等

*1) 一般には $E_{\mu\nu}$ からの寄与についての吟味が必要である．余剰次元がコンパクト化される場合，$E_{\mu\nu}$ からの寄与は無視できない．無限に広がった 1 枚の正張力ブレーン上では長波長で $E_{\mu\nu}$ からの寄与を無視することができる．

方宇宙を考えてみよう．このときブレーン上の自由度はスケール因子1つになるので，アインシュタイン方程式の成分すべてを考える必要はなくなる．そこで方程式 (18) の4次元トレースをとってみる．先刻指摘したように $E_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=0$ であることを思い出すと，

$$R = -8\pi G_4 T - \frac{\kappa^4}{4}\left(T^\nu_\mu T^\mu_\nu - \frac{1}{3}T^2\right) \quad (20)$$

が得られる．右辺第二項は $\pi_{\mu\nu}$ の4次元トレース部分からきている．ここで長波長の最低次でアインシュタイン方程式が成り立つこと，$R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R \simeq 8\pi G_4 T_{\mu\nu}$，が分かっているので，これを用いて上の式の右辺第二項の $T_{\mu\nu}$ で書けている項を $R_{\mu\nu}$ で書き直すと

$$R \simeq -8\pi G_4 T - \frac{l^2}{4}\left(R^\nu_\mu R^\mu_\nu - \frac{1}{3}R^2\right) \quad (21)$$

となる．ここで $1/l := \kappa^2\sigma/6$ で，5次元時空が厳密に adS 時空ならばその曲率半径となっている*2)．この式の右辺第二項に注目していただきたい．この項は，純粋に4次元時空での量子場を考えた場合の，膨張宇宙での量子補正の効果と全く同じ形をしている．つまり，ブレーン宇宙では古典的な宇宙論を議論していたわけであるが，余剰次元の存在を忘れてブレーン上の理論だけに注目してみると，ブレーン上の物質からの古典的な寄与だけでなく，あたかもその量子補正効果も勝手についてくるように見えるのである[9]．

関連する話題として，余剰次元にブラックホールが存在する場合が興味深い．一般にはこの場合はブレーンはブラックホールから離れている位置にあると考えられる．この場合 $E_{\mu\nu}$ は無視できず，その時間–時間成分は $E_{tt} \propto m/a^4(t)$ と輻射のように振る舞うことが分かっている*3)．m は5次元 Schwarzschild–adS ブラックホール解の質量パラメタである．E_{tt} の項が直接他の物質と相互作用することはないため，光などで観測することはできないことに注意されたい．重力（ここでは宇宙膨張）のみに通じて我々はその存在を認識できるのである．そのため暗黒輻射と呼ばれている．その他，ブレーン上のブラックホールについて田中氏によって面白い考察が試みられているが本稿では割愛する．詳しくは原論文等[7,10]を参照されたし．

*2) 5次元の宇宙項との関係は $\Lambda_4 = 0$ としているところから導かれる．

*3) 輻射のエネルギー密度は $\rho_R(t) \propto T^4 \propto a^{-4}(t)$ と振る舞う．

4. 結語

本稿ではブラックホールから端を発したホログラフィーにまつわる話題を紹介してきた．超弦理論では adS/CFT 対応として具現化し，現在幅広く精査され，今や QCD を扱う定性的議論の道具として注目を浴びている．しかし，そこでの議論は超対称性が破れた場合やブレーンの自己重力の扱いが未だ不十分であることは否めない．そのため宇宙におけるホログラフィーの議論は精査する段階には到達していない．ただ，2.3 節で見たように関連のある話題で普遍的に価値のある内容はたくさんあるであろう．今後数十年で宇宙やブラックホールに関する超弦理論からの理解はますます進んでいくであろう．今我々にできる残る仕事とは何だろうか．身を引き締めて研究に望みたい．

参考文献

1) ホログラフィック原理に関するレビューとして，R. Bousso, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002).
2) K.S. Thorne, *in Magic without Majic*, edited by J. Klauder (Freeman, San Francisco, 1972).
3) E.E. Flanagan, D. Marolf and R.M. Wald, *Phys. Rev. D* **62**, 084035 (2000).
4) T. Shiromizu, K. Nakao, H. Kodama and K.I. Maeda, *Phys. Rev. D* **47**, 3099 (1993); S.A. Hayward, T. Shiromizu and K.I. Nakao, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 5080.
5) K. Maeda, T. Koike, M. Narita and A. Ishibashi, *Phys. Rev. D* **57**, 3503 (1998).
6) L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
7) 特集「ブレーンワールド新展開」，数理科学 Vol.**487** (2004).
8) T. Shiromizu, K.I. Maeda and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
9) T. Shiromizu and D. Ida, *Phys. Rev. D* **64**, 044015 (2001).
10) T. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148**, 307 (2003); arXiv:0709.3674 [gr-qc].

（しろみず・てつや，東京工業大学大学院理工学研究科）

AdS/CFT 対応におけるウィルソンループ



三輪 光嗣

1. はじめに

自然界に存在する物質はクォークとレプトンと呼ばれるフェルミ粒子から構成されると考えられている．これらの粒子のうち，強い相互作用をするクォークはその存在が実験によって単独で観測されることはなく，陽子や中性子あるいは π 中間子といった束縛状態として観測される．このような現象はクォークの閉じ込めと呼ばれ，強い相互作用のダイナミクスによってクォークが単独で存在することが強く制限された結果，実現していると考えられている．ゲージ理論と弦理論の類似性に着目してクォークの閉じ込めを理解する試みは，AdS/CFT 対応が提案される以前から行われてきた．そしてこうした試みにおいてウィルソンループと呼ばれるゲージ理論の演算子が重要な役割を果たす．以下ではまずウィルソンループの簡単な説明から始め，次に AdS/CFT 対応におけるウィルソンループの研究を紹介する．

2. ウィルソンループ

クォークの閉じ込めはクォークを束縛する強い相互作用によるポテンシャルが，単体のクォークを引き離して行くと非常に大きくなることに起因すると考えられている．このことを電子–陽電子間の静電ポテンシャルと比較しながら見てみよう．電子–陽電子間のポテンシャルは電子–陽電子間の距離に反比例し，この場合，両者を遠く引き離すことに対して大きなエネルギーは必要とならない．この事情は電子–陽電子間の電磁場のフラックスが図 1–(a) のように広がって分布していることに起因する．一方クォークの閉じ込めは，図 1–(b) のようにクォーク–反クォーク間の強い力を媒介するゲージ場のフラックスが細く絞られて 1 次元的に伸びることで実現されていると考えられている．このようにフラックスが絞られると，フラックスにたまるエネルギーはクォーク–反クォーク間の距離に比例し，一方のクォークを遠く引き離すためには大きなエネルギーが必要となる．この考え方においてはゲージ場はクォーク間に伸びた弦（QCD 弦）のように振る舞うが，この QCD 弦の描像は AdS/CFT 対応が提唱されるより遥かに以前からゲージ理論と弦理論を結びつける基本的な

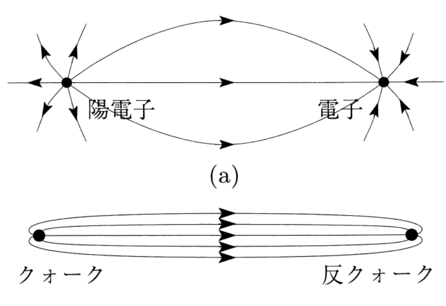


図 1　電磁場のフラックスは広がって分布するのに対し，強い相互作用を媒介するゲージ場のフラックスは 1 次元的に絞られる．

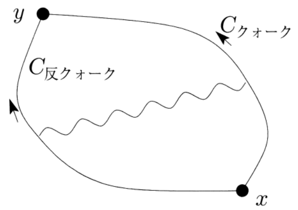


図 2 x で対生成されたクォーク，反クォークがそれぞれ $C_{クォーク}, C_{反クォーク}$ を通って y で対消滅する．波線はゲージ場の軌跡を表す．

描像であった．

ウィルソンループはこのような電磁場や強い相互作用のゲージ場が作るポテンシャルを特徴付ける演算子である．ウィルソンループの説明のために，図 2 のように大きな質量 m を持ったクォーク，反クォーク (あるいは電子，陽電子) が時空点 x で対生成され，y で対消滅する過程を考えよう[1]．図 2 には (反) クォークが通る経路 $C_{(反)\ クォーク}$ が実線で，クォーク–反クォーク間で交換されるゲージ場の軌跡が波線で描かれている．量子論的にはこの生成消滅の過程を特徴付ける相関関数はクォーク，反クォークが通る様々な経路の寄与の足し上げとして，おおよそ次のように与えられる．

$$\sum_C e^{-mL(C)}\langle W(C)\rangle. \tag{1}$$

ここで図 2 の (反) クォークが通る経路 $C_{(反)クォーク}$ を一つにまとめた閉じた経路を C，その長さを $L(C)$ と書いた．和の記号は様々な経路 C に関する足し上げを意味する．第一因子は質量 m の自由粒子の伝搬の寄与，第二因子 $\langle W(C)\rangle$ がウィルソンループの期待値と呼ばれる量であり，クォークとゲージ場の相互作用の寄与を表す．これらの因子の積が小さくなるような経路に沿った伝搬は強く制限される．例えば第一因子の存在によって，長い経路に沿った伝搬は制限されることになる．クォークの閉じ込めを実現するためにはクォーク–反クォーク間の距離が大きくなるような経路が制限される必要があり，強い相互作用においては第二因子がこうした性質を持つものと期待される．図 2 には非常に簡単なゲージ場の軌跡が波線で描かれているが，一般にはクォーク，反クォークの間のゲージ場の伝搬は非常に複雑な網目状の軌跡をなし，ウィルソンループの期待値 $\langle W(C)\rangle$ はこうした複雑な寄与の総和として与えられる*1)．そしてこのようにゲージ場が交換されることで，クォーク–反クォーク間のポテンシャルが生まれる．ウィルソンループの期待値とクォーク間ポテンシャルの関係を見るためにクォーク，反クォークが時間間隔 T の間，空間的に距離 R だけ離れて静止している状況を考えよう．この場合，図 2 の経路の和 C は幅 R，長さ T の長方形となる．特に T が大きい場合にはこの経路からの式 (1) への寄与は系の最低エネルギー $\widetilde{E}(R)$ を用いて $e^{-\widetilde{E}(R)T}$ と評価できる．このエネルギー $\widetilde{E}(R)$ からクォーク，反クォークの質量に対応する部分をさっぴいた残り $E(R)$ が，クォーク–反クォーク間のポテンシャルを与えるが，同時にこの部分が次のようにウィルソンループの期待値を与える*2)．

$$\langle W(C)\rangle \sim e^{-E(R)T}. \tag{2}$$

ここでクーロンポテンシャル $E(R) = -1/R$, およびクォークの閉じ込めを実現する線形ポテンシャル $E(R) = \mathcal{T}_{\rm QCD}R$ の場合に上の考察から導かれるウィルソンループの期待値の振舞いを見てみよう．クーロンポテンシャルの場合はウィルソンループの期待値は $\langle W(C)\rangle \sim e^{T/R}$ となり，ループの形を特徴付ける無次元のパラメータ T/R の関数となる．一方，線形ポテンシャルの場合はウィルソンループの期待値は $\langle W(C)\rangle = e^{-\mathcal{T}_{\rm QCD}RT} = e^{-\mathcal{T}_{\rm QCD}A(C)}$ のように経路 C によって囲まれる極小の面積 $A(C)$ で与えられる．ここで現れた面積は経路 C に端を持つ QCD 弦が伝搬する際に掃く 2 次元面の面積であり，因子 $e^{-\mathcal{T}_{\rm QCD}A(C)}$ は張力 $\mathcal{T}_{\rm QCD}$ を持った QCD 弦が伝搬することによる寄与を表している．QCD 弦の描像から導かれるこうした振舞いはウィルソンループの面積則と呼ばれ，クォークの閉じ込めを起こすゲージ理論に特有の振舞い

---

*1) ゲージ場の軌跡のうち，他の簡単な例は第 4 節の図 6 にも載せた．一般には図 6 よりさらに複雑な軌跡をなす．

*2) $\langle W(C)\rangle$ にはクォーク質量に対する量子補正も含まれるが，以下では質量補正をさっぴいた部分を $\langle W(C)\rangle$ と書く．

である．次節で紹介するAdS/CFT対応におけるウィルソンループの研究は，これとは別の“面積則”を超弦理論の枠組みの中で再発見した形となっている．

3. AdS/CFT 対応における ウィルソンループ

超弦理論では平行に重ねて置かれた N 枚の D3 ブレインを考えると，その上の開弦の励起は低エネルギーでは超対称性を4つ持った4次元のゲージ理論で記述される*3)．このゲージ理論のウィルソンループを，前節の流れに沿って考えることにしよう．D3ブレイン上のゲージ理論にはクォークに対応する粒子が存在しない．クォークに対応する粒子を導入するために図3のように，N 枚の D3ブレインとは別にもう1枚のD3ブレインを離れた場所に平行に置き，これらの間に伸びた開弦を考える．この開弦はD3ブレイン上のゲージ場と相互作用をする粒子に対応するが，以下ではこの粒子のことをクォークと呼ぶことにする．弦が伸びていることに対応してこのクォークはD3ブレイン間の距離に比例した質量を持つ．図3のように2つの開弦が伝搬してシリンダーをなす過程は4次元のゲージ理論から見ると対生成されたクォーク，反クォークが経路 C に沿って伝搬し，対消滅する過程に対応する．伝搬過程において（反）クォークはゲージ場と相互作用し，前節で説明したようにこの伝搬過程へのゲージ場の寄与はウィルソンループの期待値で与えられる*4)．このように N 枚のD3ブレインを開弦の低エネルギー理論であるゲージ理論を用いて扱い，図3の開弦の伝搬を考えることでウィルソンループの情報が読み取れることが分かる．

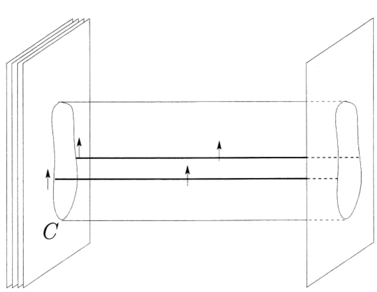


図3 D3ブレイン間に伸びた弦はゲージ場と相互作用する粒子に対応し，その粒子の伝搬に対するゲージ場の影響はウィルソンループの期待値で与えられる．

AdS/CFT 対応の仮説が正しいとすると，このウィルソンループの情報を閉弦の低エネルギー理論である超重力理論の視点からも読み取れることになる．ここでは参考文献2,3)で提案されたAdS/CFT対応におけるウィルソンループと弦の世界面の対応関係を紹介しよう．超重力理論においてはDブレインはブラックブレイン解と呼ばれるソリトン解として記述される．この解においては N 枚のD3ブレインが置かれた原点付近では時空が大きく曲げられ地平線が形成されている．そして地平線近傍にはAdS時空と呼ばれる曲がった時空が広がっており，AdS時空の外では遠方に行くに従って時空は平坦に近付く．参考文献2,3)では，図3に描かれた N 枚のD3ブレインをブラックブレイン解で置き換え，その曲がった時空上で開弦の伝搬が議論された．この状況を図4，5を用いて説明しよう．図4にはブラックブレイン解の地平線近傍の様子が描かれている．左端と右端に破線で描かれた4次元の超平面がそれぞれ

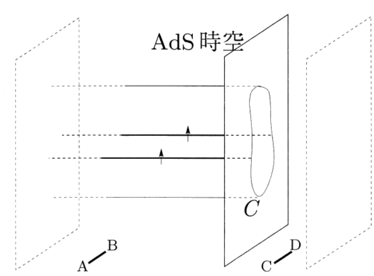


図4 N 枚のD3ブレインを対応する超重力解で置き換え，その解の地平線近傍にD3ブレイン，開弦を置く．

*3) Dブレインに関しては橋本氏の記事を参照．

*4) 図3の開弦はスカラー場等とも結合し，その寄与は超対称性と関連して重要となるがここではこの点には触れない[2, 3]．

地平線と AdS 時空の境界を表しており，これら 2 つの超平面に挟まれた領域が 5 次元の AdS 時空 (AdS_5 時空) である[*5]．図 4 には描かれていないが，AdS 境界よりさらに遠方 (図の AdS 境界の右側) では時空は漸近的に平坦時空に近付く．AdS 時空は曲がった時空であり，このことに対応して図 4 では AdS 境界に近い領域ほど空間が縮小されて描かれている．すなわち，境界と平行な方向に等しい座標間隔を持った図中の 2 つの線分 AB, CD の実際の長さ $l_{\rm AB}, l_{\rm CD}$ の間には $l_{\rm AB} < l_{\rm CD}$ の関係がある．特に，AdS 境界の直上では有限の座標間隔を持った 2 点間の実際の距離は無限大になっている．ウィルソンループの情報を読み取るために，図 4 には図 3 で考えたのと同じように 1 枚の D3 ブレインとその上に端点を持つ開弦が描かれている．図 3 では開弦は N 枚の D3 ブレイン上のゲージ場と相互作用をしながら伝搬していた．一方，図 4 では N 枚の D3 ブレインはブラックブレイン解で置き換えられており，開弦は曲がった背景時空の影響を受けながら伝搬することになる．開弦が伝搬する際に掃く 2 次元面に関しては後ほど説明するが，図 4 では弦の伝搬をとりあえず仮想的に表すために弦の左端を破線で描いた．前節と同様クォークの質量が大きい状況を考えるために，1 枚の D3 ブレインが N 枚の D3 ブレインから遠く離れた状況を考えたい．このため文献 3) では 1 枚の D3 ブレインを AdS 境界上，あるいはさらに遠方に置いた状況に対応して，図 5 のように AdS 境界上の経路 C に端を持つ開弦の伝搬が考えられた．量子論的には弦の様々な配位を考慮する必要があるが，文献 2, 3) ではその古典極限として極小の面積を持つ 2 次元面で弦の伝搬を評価する議論がなされた．図 5 の AdS 境界上の経路 C に張り付いたお椀のような 2 次元面が極小曲面の例を表している．極小曲面が図のように AdS 時空の内部に張り出した 2 次元面となることは，AdS 時空が曲がった時空であることと関連し

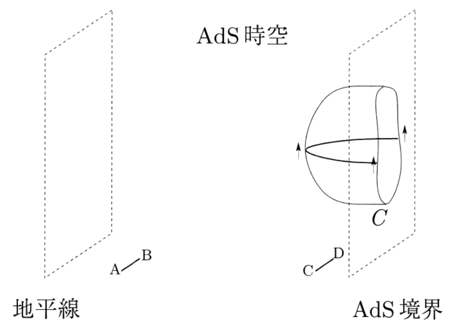


図 5　クォークが大きな質量を持つことに対応して AdS 境界に端を持つ開弦を考える．図のように AdS 時空に張り出した 2 次元面が極小曲面を与える．

ている．まず，図 4 の破線のように 2 つの弦が分かれたまま地平線に到達する場合と比べ，図 5 のように 2 つの弦が U 字型につながって伝搬したほうが面積の小さな 2 次元面を作ることができる．また時空が曲がっており $l_{\rm AB} < l_{\rm CD}$ の関係があるため，世界面が境界近傍で境界と平行な方向に伸びるとそこでは大きな面積を持つ．このため境界近傍で閉じた面を作るよりも，図のように一旦 AdS 時空の内側に張り出してから閉じた面を作ったほうが小さな面積を持った 2 次元面を作ることができるわけである．

少しくどい説明が続いたので，ここでこれまでに説明したことを簡単にまとめ，その後で文献 2, 3) で提案された具体的な対応関係の式を紹介しよう．まず，開弦の立場 (あるいはゲージ理論の立場) で N 枚の D3 ブレインを扱い，図 3 の開弦の伝搬過程がウィルソンループの情報を含んでいることを述べた．一方，「N 枚の D3 ブレインを閉弦の立場で (あるいはブラックブレイン解として) 扱う場合は，図 3 の開弦の伝搬過程の対応物として図 5 のような AdS 境界に張り付いた弦の伝搬を考えましょう」というのが文献 2, 3) で提案された内容であった．そして文献 2, 3) で仮説として提案された具体的な対応関係は，図 5 の開弦の振幅を古典解で評価したものが強結合ゲージ理論におけるウィルソンループの期待値を与えるというものであり，式を用いると次のようになる．

*5)　超重力解は AdS 時空の他に余剰な方向も持つ．以下ではこの方向に局在した話をするため，余剰な方向に関しては触れない．

$$\langle W(C)\rangle = e^{-\mathcal{T}_{\rm string}A(C)}. \tag{3}$$

$\mathcal{T}_{\rm string}$ は超弦理論における弦の張力, $A(C)$ は AdS 境界上の経路 C に端を持つ弦の古典解の面積を表している．弦理論側で古典極限を考えることはゲージ理論側の強結合領域を考えることに対応するが，この点に関しては次節で少し触れる．

ここで前節で説明したウィルソンループの面積則と式 (3) の関連を指摘しておきたい．前節でクォークの閉じ込めが実現しているゲージ理論においては，QCD 弦の描像からウィルソンループが面積則を満たすことが期待されると述べた．式 (3) は QCD 弦と似た描像を超弦理論の枠組みの中で再発見した形となっている．このため素朴に考えると，式 (3) の提案に従うとゲージ理論のウィルソンループが常に面積則を満たすという結論を出したくなるかも知れない．しかしながら QCD 弦の描像と，AdS/CFT 対応の仮説 (3) の間には相違点がある．それは QCD 弦がゲージ理論が定義された 4 次元時空を伝搬するものであったのに対し，AdS/CFT 対応においてはウィルソンループに対応する弦は図 5 のように高次元時空を伝搬するという点である．したがって式 (3) は必ずしもウィルソンループが 4 次元の意味での面積則を満たすことを主張するものではない．実際，この節で念頭においていたゲージ理論はクォークの閉じ込めを起こさない理論であるが，次節で見るように式 (3) はこの理論のウィルソンループの振舞いを再現する．

ウィルソンループの期待値は複雑なゲージ場の軌跡の総和として与えられるが，仮説 (3) はこうした物理量を弦の古典解を用いて計算できることを主張する強力な提案である．実際にこの関係式をより広い範囲のゲージ理論の場合に拡張して，ゲージ理論の相構造を議論する研究も行われている．一方で仮説 (3) の正当性を理解する研究も重要である．次節では後者の研究の例として，超対称性を 4 つ持った 4 次元のゲージ理論における仮説 (3) の検証の研究を紹介する．

4. 対応関係の検証

前節で考えたゲージ理論と AdS_5 時空上の超弦理論の対応においては，円形のウィルソンループに関して仮説 (3) を検証する研究が行われている．まず，式 (3) の両辺の定性的な振舞いに関しては理論の対称性から強い制限が付く．今考えているゲージ理論は長さを定数倍する対称性を含む大きな対称性（共形対称性）を持つ理論であり，$\mathcal{T}_{\rm QCD}$ のような理論を特徴付ける次元のある量を持たない．このため左辺のウィルソンループの期待値は面積則を示さず，ループの形状を特徴付ける無次元量に依存する．特に円形のウィルソンループの場合は経路を特徴付ける無次元パラメータが存在しないため，その期待値は円の半径によらず一定値となる．ここまではゲージ理論の共形対称性だけから決まってしまうが，式 (3) は共形対称性と矛盾しない提案となっており，この振舞いは右辺の弦理論の計算からも自動的に再現される．実際 AdS 境界上の円に端を持つ極小曲面の面積が円の半径に依存しないことは簡単に確かめられる．正確には極小曲面の面積は AdS 境界近傍で発散しており，この発散をさっぴいた正則化された面積が円の半径によらず等しい値となる．この発散はゲージ理論側で大きな質量のクォークを考えることに対応すると解釈され，発散をさっぴく手続きは第 2 節でクォーク質量の寄与をさっぴいた部分を $\langle W(C)\rangle$ と定義したことに対応する．こうした極小曲面の面積が円の半径に依存しないという事実は AdS_5 時空がゲージ理論の共形対称性に対応する対称性を持つことに起因している．

以上のように経路が円形の場合に式 (3) の両辺の定性的振舞いが一致することは，対称性だけから容易に言えてしまう．実は経路が円形の場合，仮説 (3) を定量的に検証する研究も行われている．最後にこうした研究を紹介したい．経路が円形の場合には式 (3) の右辺は具体的には次のように与えられる．

$$e^{-\mathcal{T}_{\rm string}A(C)} = e^{-\sqrt{\lambda}A(C)} = e^{\sqrt{\lambda}}. \tag{4}$$

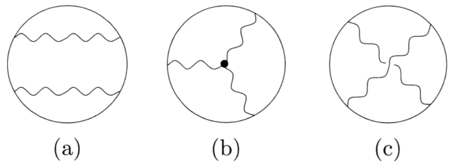


図 6　(a) のようにウィルソンループのゲージ場どうしを直接自由伝搬関数でつないだ寄与をラダー図と呼ぶ．(b) はラダー図ではない図の例であり，相互作用を含む．(c) では 2 つの伝搬関数は相互作用を介さずにすれ違っており，こうした図は平面上に描くことができないため非平面図と呼ばれる．

ここで弦理論とゲージ理論のパラメータを関係付ける式 $\mathcal{T}_{\mathrm{string}} = \sqrt{\lambda}$ を用いた*6)．λ はゲージ理論の結合定数 g_{YM} と D3 ブレインの数 N を用いて $\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$ で定義され，トフーフト結合定数と呼ばれる．式 (4) の最終表式では実際に経路が円の場合に，正則化された面積が $A(C) = -1$ と求まることを用いた．この式からまず分かることは，ゲージ理論の $1/\sqrt{\lambda}$ という量が弦の作用の前にかかるプランク定数の役割を果たすということである．前節では弦の伝搬を古典解で評価したものとして式 (3) の提案を紹介した．こうした扱いが正当化されるのは $\mathcal{T}_{\mathrm{string}} = \sqrt{\lambda}$ が大きい状況，すなわち前節で述べた通り，強結合のゲージ理論を考えている場合である．実際に弦理論側から予言される式 (4) のウィルソンループの振舞いは，ゲージ理論の単純な摂動計算から期待される振舞いとは異なっている．今考えているウィルソンループの期待値を強結合のゲージ理論を用いて計算することは困難であり，式 (4) を厳密な意味でゲージ理論側から再現することはできていない．現時点でこれに最も近い成果は，ウィルソンループの摂動展開に現れる様々なゲージ場の軌跡の中で，ラダー図と呼ばれる特殊な図の寄与を摂動の全次数に関して足し上げるという研究である[4]．ラダー図とは図 6–(a) のように，波線で表されたゲージ場の自由伝搬の寄与だけを考慮した軌跡であり，図 6–(b) の中心の黒丸のようなゲージ場どうしの相互作用をすべて無視したものである．実は経路の形が円形の場合にはラダー図を摂動の全次数に関して足し上げることができる．さらにそうして得られた総和において λ の大きな極限をとると，式 (4) の振舞いが $\sqrt{\lambda}$ の前の係数も含めて正しく再現される．円形のウィルソンループは高い対称性を持つため，図 6–(b) のような図は互いに相殺して上述のような一致が得られていると期待されている．ラダー図だけを足し上げる計算の正当性等，理解すべき点が残されてはいるが，こうした研究は仮説 (3) の非自明な検証の候補と考えられている．

*6)　簡単のため AdS_5 の半径を $1/\sqrt{2\pi}$ と取った．

5. 最後に

ここでは AdS/CFT 対応におけるウィルソンループの取扱いを紹介した．ウィルソンループと弦の対応はゲージ理論と弦理論の間の基本的な対応関係の一つであり，こうした対応の正当性や適用範囲に関する更なる理解は重要である．ここで取り上げた話題の他に共形対称性を持たないゲージ理論のウィルソンループの期待値を式 (3) を用いて弦理論側で計算し，ゲージ理論の相構造を議論する研究も行われている．こういった研究に関しては文献 5) 等を参考にしていただきたい．また，ここでは基本表現のウィルソンループの取扱いのみを紹介したが，より高い次元を持った表現を考えることで図 6–(c) のような非平面図をも含んだゲージ理論と弦理論の対応が議論され，興味深い一致が得られている．こうした研究に関しては文献 6, 7) 等を参考にしていただきたい．

参考文献

1) K.G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445.
2) S.J. Rey and J.T. Yee, *Eur. Phys. J. C* **22** (2001) 379.
3) J.M. Maldacena, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4859.
4) J.K. Erickson, G.W. Semenoff and K. Zarembo, *Nucl. Phys. B* **582** (2000) 155.
5) E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505.
6) N. Drukker and B. Fiol, *JHEP* **0502** (2005) 010.
7) S. Yamaguchi, *Int. J. Mod. Phys. A* **22** (2007) 1353; *JHEP* **0605** (2006) 037.

（みわ・あきつぐ，東京大学大学院総合文化研究科）

特集／ゲージ重力対応

巨大重力子・泡状時空・行列模型

AdS/CFT 対応における時空の出現



土屋 麻人

1. はじめに

今回の特集であるゲージ重力対応の不思議さの一つにゲージ理論が住む時空と重力理論が記述する時空は別物ということがある．つまり何らかの意味でゲージ理論の自由度から時空が‘出現’しているのである．ゲージ重力対応の好例である解ける行列模型*1)と弦理論の対応[1]においては，この時空の出現が行列模型（ここでのゲージ理論）の行列の固有値を通して明快に理解される．ここでの重力理論である弦理論は弦が運動する標的空間が2次元以下というおもちゃの弦理論であり，大雑把に言って，行列模型が素朴に与える次元 $+1$ が弦理論側の時空の次元になる．おもちゃとは言え，行列模型によって弦理論が非摂動的に定義される貴重な例であり，80年代終わり頃この対応は精力的に研究され，2000年代初めに再検討がなされ，現代的な解釈が与えられた[2]．

ここでは，特に標的空間が2次元の場合を考えよう．対応する行列模型はサイズ N のエルミート行列に対する量子力学になっていて，N は最終的にダブルスケーリング極限を通じて無限大の極限をとる．系は N 個の行列の固有値についての理論に帰着できて，これらの固有値は N 個の互いに相互作用しないフェルミ粒子とみなせる．これらのフェルミ粒子の運動する空間が本質的に弦理論側の空間に相当し，元からあった時間と合わせて2次元の弦理論となる．このように行列の固有値から時空が出現するのである．このときフェルミ面*2)上のさざ波，すなわち集積した固有値の集団的なゆらぎの運動が閉弦であり，フェルミ面から有限離れたフェルミ粒子はZZブレーン[3]と呼ばれるこの弦理論に存在するD0ブレーンに相当する．すなわち，この対応の現代的解釈は以下のようになる．もともと行列の固有値はDブレーンで，固有値密度が密になってこれらのDブレーンは集積する．行列模型はこのDブレーン上の開弦の理論である．開弦と閉弦の双対性より集積したDブレーンが源になって作る曲がった時空上の閉弦の理論が行列模型と等価であり，今の2次元の弦理論である．弦理論側ではこれら集積したDブレーンはもはや見えなくなる．その集積から離れて孤立した固有値がこの時空におかれたDブレーンに対応するのである．

さて，AdS/CFT 対応の典型例である $AdS_5 \times S^5$ 上のIIB型超重力（弦）理論と $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤ

*1) 行列模型とはいくつかの行列を力学変数とする0次元あるいは1次元上に定義された理論で，1次元のときは行列量子力学とも呼ばれる．通常行列のサイズが大きくなったときの振舞いに興味がもたれる．このときラージ N ゲージ理論のおもちゃとみなせ，ある場合にはそれとの関係が見られる．

*2) フェルミ多粒子系においてはパウリの排他原理によって同一の軌道を2つ以上の粒子が占めることができず，基底状態はエネルギーの低い軌道から順々に粒子をつめていくことにより得られる．通常フェルミ面とは基底状態において粒子が占められている準位と占められていない準位との波数空間での境界のことを言うが，ここでは実空間あるいは位相空間での境界の意味で使っている．

ン・ミルズ理論の双対性の予想[4]は同じようにD3ブレーン上の開弦の理論とそれらのDブレーンが源となってつくる $AdS_5 \times S^5$ の時空上の閉弦の理論の双対性に基づく予想である．よって，このときもゲージ場の固有値的な自由度がDブレーンとみなせ，時空を出現させるという見方ができるのであろうか．以下に見るカイラルプライマリーと呼ばれる対称性の非常に高いセクターに限ると，その答えは肯定的であることが最近明らかにされた[5~7]．このセクターに限るとゲージ理論はある行列模型に帰着し，その行列の固有値がやはりフェルミ粒子系とみなせ，フェルミ面上のさざ波が重力側の重力子，孤立した固有値が巨大重力子（giant graviton）[8]や AdS 巨大重力子[9] と呼ばれるD3 ブレーンに相当することが言える．そしてこの行列の固有値分布が時空の一部とみなせ，‘時空の出現’ が起こる．本稿では次節以降，泡状 AdS 時空（bubbling AdS geometry）と呼ばれるこの最近の発展を解説する．

行列の固有値分布から時空が出現するという考え方を突き詰めたものが IIB 行列模型[10]などの行列模型と言える．そこでは 0 次元の理論の 10 個の行列の固有値の動的分布が時空を決定し，我々の時空がなぜ（ほぼ）平坦な 4 次元時空なのか説明できる可能性を示唆する．泡状 AdS 時空の発展はこのような超弦理論の非摂動的定式化の完成に向けて，多くの知見をもたらすと期待され，今後のさらなる発展が待たれる．

2. 巨大重力子：まるい D ブレーン

巨大重力子とは 3 次元球面の形をした D3 ブレーンのことである．なぜこのような奇妙な名前なのかは 4 節で明らかになる．ここではその本質を理解するために，まず図 1（左）ような模型を考える．+1 の電荷をもった粒子（図 1（左）の黒丸）と −1 の電荷をもった粒子（図 1（左）の白丸）が張力 T が一定で長さが可変の ‘ひも’ で結ばれている電気双極子があり，2 つの粒子は半径 R の球面上に束縛されているとする．今，球の中心に磁

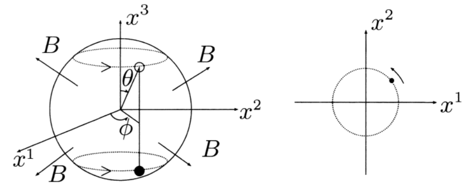


図 1　球面に束縛された電気双極子の磁場中の回転運動（左）とその平面への射影（右）．

気単極子をおき，球面を垂直に一定の磁場 B が貫くようにする．ディラックが示したように，B は勝手な値をとることはできず，N を整数として $N/2R^2$ のような離散的な値しかとれない．N をフラックスと呼ぼう．各粒子は磁場中の運動から生じるローレンツ力とひもの張力と球面から束縛力を受ける．今，磁場が十分に大きくて粒子の質量が十分小さいとする．このとき，力の釣り合いを考えると図 1（左）にあるように θ が一定で $\dot{\phi} = 2TR/N =$ 一定の運動が安定に実現することがわかる．ここでドットは時間微分を表す．回転運動することによりローレンツ力を受け，双極子がつぶれないことに注意されたい．この運動を (x^1, x^2) 平面に射影したのが図 1（右）で原点を中心とした半径 $R \sin\theta$ の円周上の等速円運動になっている．この系の角運動量は角速度 $\dot{\phi}$ の共役で $N \cos\theta$ に等しい．これは双極子のサイズが大きくなるにつれ大きくなり，$\theta = 0$ で双極子のサイズが最大値 $2R$ をとるとき最大値 N をとり，角運動量に上限が存在する．

さて，$AdS_5 \times S^5$ 時空における 5 次元球面 S^5 は 6 次元の平坦な空間 $(x^1, x^2, \cdots, x^6)$ に埋め込める．(x^1, x^2) 平面で 1 点に見えるものは 2 次元球面のときは 2 点からなる双極子だったが，5 次元球面上では一般に 3 次元球面になる．今，S^5 には D3 ブレーンの感じるフラックス N の磁場が貫いており，3 次元球面の形をした D3 ブレーンは D3 ブレーンの電荷に対してちょうど双極子のようになっていて，(x^1, x^2) 平面に射影したときに図 1（右）のような運動になるような 5 次元球面上の回転運動が安定に実現する．これが巨大重力子である．双極子の模型ときは双極子のサイズが

最大になるときに角運動量が最大値 N をとったが，今の場合も3次元球面はその半径が5次元球面の半径に一致するときが最大であるが，このとき角運動量は上限値 N をとる．他に AdS_5 内で3次元球面の形に拡がり，5次元球面上では点に見えて赤道上を回転する安定なD3ブレーンも存在する．これをAdS巨大重力子と言い，この場合3次元球面の半径は AdS_5 内で上限をもたないことに対応して角運動量に上限はない．巨大重力子もAdS巨大重力子も超重力理論のもつ32個の超対称性のうち16個を保つ半BPSの状態である．

3. 2次元の磁場中の荷電粒子

この節ではゲージ重力対応をひとまず離れて，通常ランダウ問題と呼ばれる2次元 (x^1, x^2) 平面に垂直に磁場がかかっている場合の荷電粒子の問題を考える．磁場に対して対称ゲージをとり，適当に単位をとると系のハミルトニアンは

$$H_L = \frac{1}{2}(p_1 + x^2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - x^1)^2$$

と書かれる．ここで，p_1 と p_2 はそれぞれ x^1 と x^2 に共役な運動量である．2次元調和振動子のハミルトニアン

$$H_{HO} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\Big((x^1)^2 + (x^2)^2\Big)$$

と2次元の角運動量 $L = x^1 p_2 - x^2 p_1$ を用いて，$H_L = H_{HO} - L$ と書けることはすぐわかる．古典的な基底状態（最低ランダウ準位）は

$$H_{HO} = L \ \leftrightarrow \ x^1 = p_2 = \dot{x}^2,\ x^2 = -p_1 = -\dot{x}^1$$

で与えられる．これは図1（右）にある原点を中心にした等速円運動であり*3)，角運動量は円の半径の2乗に等しい．この系を量子化するために複素座標 $z = (q_1 + iq_2)/\sqrt{2}$ を導入し，生成消滅演算子を次のように構成する．

$$\hat{c}_1 = (z + \bar{\partial}_z)/\sqrt{2}, \quad \hat{c}_1^\dagger = (\bar{z} - \partial_z)/\sqrt{2},$$
$$\hat{c}_2 = (\bar{z} + \partial_z)/\sqrt{2}, \quad \hat{c}_2^\dagger = (z - \bar{\partial}_z)/\sqrt{2}.$$

*3) 正確には2次元調和振動子の系と見ると円運動であり，元の系としては原点から半径 $\sqrt{L}$ のところに静止している．

これらは $[\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger] = \delta_{ij}\ (i, j = 1, 2)$ を満たす．生成消滅演算子を用いて量子論的なハミルトニアンと角運動量は次のように表される．

$$\hat{H}_{HO} = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + 1,$$
$$\hat{L} = \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 - \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1, \quad \hat{H}_L = 2\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + 1.$$

これらを同時に対角化する固有状態の波動関数は

$$\Phi_{n_1,n_2}(z,\bar{z}) = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{c}_2^\dagger)^{n_2}\Phi_{0,0}$$

である．ただし，ここで $\Phi_{0,0} = e^{-|z|^2}$ であり，これは2次元調和振動子の基底状態である．この波動関数に対する H_{HO} の固有値，すなわち系のエネルギーは $2n_1 + 1$ である．したがって，最低ランダウ準位は $n_1 = 0$ の状態でそのエネルギーは1であり，n_2 の分の無限の縮退が起こっている．最低ランダウ準位の波動関数は規格化定数を除いて

$$\Phi_n(z,\bar{z}) \equiv \Phi_{0,n}(z,\bar{z}) = z^n e^{-|z|^2}$$

であり，このときの角運動量は n で与えられる．

さて，今までは1粒子を考えてきたが，ここからは互いに相互作用しない N 個のフェルミ粒子が存在する場合に話を拡張する．ここで特に考えたいのは量子ホール効果のときによく考えられるすべてのフェルミ粒子が最低ランダウ準位にある場合である．全角運動量の最小値は $\sum_{n=0}^{N-1} n = N(N-1)/2$ で与えられ，この値を全角運動量から差し引いたものを新たに全角運動量 J と定義するのが便利である．すると，全角運動量が最低（$J = 0$）の状態は図2（左）にあるように‘フェルミ粒子の海’が詰まった状態である．今，N は大きい極限を考

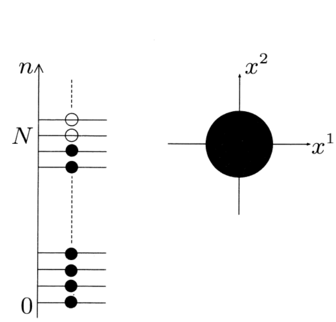


図2 $J = 0$ の状態に対する角運動量の占有準位（左）と古典的電荷分布（右）．

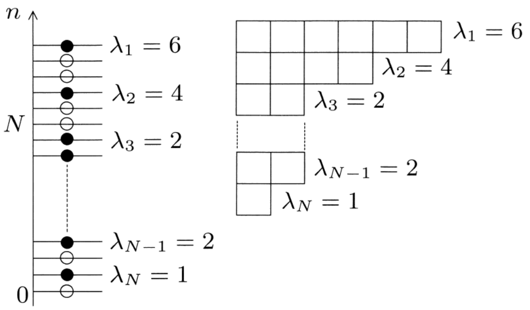


図 3　占有された角運動量準位（左）とヤング図（右）．

え，あらわには書いていない $\hbar$ がゼロにいく古典極限を $N\hbar$ を一定に保つようにとると，この状態に対応する古典的電荷分布は図 2（右）のようになる．黒い部分の面積は N の定数倍であり，量子化されている．

一般に全角運動量が J の状態は非増加の整数の列 $\langle\lambda\rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0)$ で $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = J$ を満たすもので分類され，この列に対応する状態の占有された角運動量準位は図 3（左）のようになる．この状態に対する N 体フェルミ粒子の波動関数は規格化定数を除いてスレーター行列式

$$\begin{aligned}\Phi_{\langle\lambda\rangle}(z_1, z_2, \cdots, z_N) &= \det_{i,j} \Phi_{N-i+\lambda_i}(z_j, \bar{z}_j)\\ &= \det_{i,j} z_j^{N-i+\lambda_i} e^{-\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2}\end{aligned}$$

で与えられる．これは (i,j) 成分が $\Phi_{N-i+\lambda_i}(z_j, \bar{z}_j)$ の $N \times N$ 行列の行列式である．

非増加の列 $\langle\lambda\rangle$ には図 3（右）に見られるように $GL(N,C)$ の規約表現を分類するヤング図と一対一対応がある*4)．ここでヤング図の箱の総数が全角運動量 J になっている．今，Z を $GL(N,C)$ の元とするとこのヤング図に対してシューア多項式が次式で定義される．

$$\chi_{\langle\lambda\rangle}(Z) = \frac{1}{J!} \sum_{\sigma \in S_J} \chi_{\langle\lambda\rangle}(\sigma) \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_J = 1}^{N} Z_{i_1 i_{\sigma(1)}} Z_{i_2 i_{\sigma(2)}} \cdots Z_{i_J i_{\sigma(J)}}.$$

ここで，$\chi_{\langle\lambda\rangle}(\sigma)$ は $\langle\lambda\rangle$ で指定される対称群 S_J の規約表現の指標である．シューア多項式は

$$\prod_{a=1}^{K} \mathrm{Tr}(Z^{J_a}) \qquad (1)$$

の形の多重トレースの線形結合で表される．ここで，$\sum_{a=1}^{K} J_a = J$ である．Z の固有値を $z_1, z_2, \cdots, z_N$ とすると，ワイルの指標公式よりシューア多項式は

$$\chi_{\langle\lambda\rangle}(Z) = \frac{\det_{i,j} z_j^{N-i+\lambda_i}}{\Delta(z)}$$

と表される．ここで，分母の $\Delta(z)$ は分子ですべての λ_i をゼロにすることにより得られ，Vandermonde 行列式 $\prod_{i<j}(z_i - z_j)$ に等しい．結局，N 体フェルミ粒子の波動関数は定数倍を除いて

$$\Phi_{\langle\lambda\rangle} = \chi_{\langle\lambda\rangle}(Z)\Delta(z) e^{-\sum_{i=1}^{N} z_i \bar{z}_i} \qquad (2)$$

と書けることがわかった．

例として図 4 に 1 個の‘空孔’によって全角運動量が $\mathcal{O}(N)$ の J となるときの占有状態とヤング図と古典的電荷分布を示した．また，図 5 に‘フェルミ面’からの 1 粒子の励起によって全角運動量が $\mathcal{O}(N)$ の J となるときの占有状態とヤング図

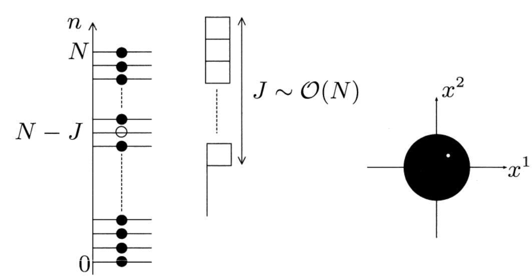


図 4　巨大重力子に対する占有準位（左）とヤング図（中）と古典的電荷分布（右）．

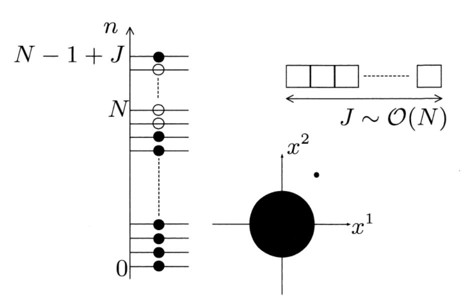


図 5　AdS 巨大重力子に対する占有準位（左）とヤング図（右上）と古典的電荷分布（右下）．

*4)　ヤング図から得られるマヤ図形を用いるとフェルミ粒子の準位との関係がより見やすいが，ここでは割愛する．

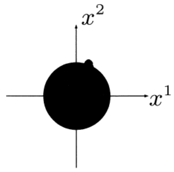


図 6 カルザ・クライン重力子に対応する古典的電荷分布.

と古典的電荷分布を示した. 最後に‘フェルミ面’付近の粒子の励起と‘空孔’の組合せで全角運動量が $\mathcal{O}(1)$ になるときの古典的電荷分布を図 6 に示した. これは‘フェルミ面’上のさざ波を表す. 図 4, 図 5, 図 6 は後の節でそれぞれ巨大重力子, AdS 巨大重力子, カルザ・クライン重力子に対応することがわかる.

4. カイラルプライマリー演算子と行列模型

この節では AdS/CFT 対応のゲージ理論側のカイラルプライマリー演算子について解説する. $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論には 6 個の随伴表現の実スカラー場が存在し, $SO(6)$ の R 対称性のベクトル表現を成している. この 6 個のスカラーのうち 2 個を $Z=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$ のように複素に組み, カイラルプライマリー演算子と呼ばれる. (1) の形の演算子を考える. この演算子のスケール次元 Δ と $SO(6)$ の部分群の $U(1)$ に対する電荷 J は古典的に $\Delta=J=\sum_{a=1}^{K}J_a$ で与えられるが, この演算子が半 BPS であるという著しい性質のため, この関係式はくりこみを受けず量子論的にも正しい. また, この性質のためにこれらの演算子についての例えば 2 点相関関数が理論の結合定数に依らないという非くりこみ定理が成立する. 物理的に独立な自由度を同定するためには, 2 点相関関数が直交する正しい基底を選ばなくてはならない. 前節で見たシューア多項式は (1) の型の演算子の線形結合で書けているが, 実はこれがこの要請を満たしている. J は 2 節で議論した S^5 内の角運動量に同定される. J が N に比べて十分小さいときは $\mathrm{Tr}(Z^J)$ を基底としてよく, カルザ・クライン重力子 (‘普通の’ 重力子) に同一視される. 図 4 の $J\sim\mathcal{O}(N)$ の縦長のヤング図に対応する $\chi_{\langle\lambda\rangle}(Z)$ は J に N という上限があることなどから, 巨大重力子と同一視されることがわかる[11]. 図 5 の $J\sim\mathcal{O}(N)$ の横長のヤング図では J に上限はなく, 対応する $\chi_{\langle\lambda\rangle}(Z)$ は AdS 巨大重力子に同一視されることがわかっている[5]. 巨大重力子の名前はゲージ理論側で普通の重力子に対応する演算子と同じ型の演算子に対応する拡がった物体ということから由来する.

今までは R^4 での $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論を考えてきたが, この理論は共形不変な理論であるために, 共形写像により‘シリンダー’ $R\times S^3$ 上の等価な理論に移れる. この写像の下, R^4 上の演算子は $R\times S^3$ 上の状態と 1 対 1 対応し, R^4 でのスケール次元 Δ は $R\times S^3$ でのエネルギー E に等しくなる. さて, Z を S^3 の球面調和関数で展開し, エネルギー最低の s 波モード (S^3 の座標依存性のないモード) から作られた状態が少なくとも結合定数がゼロのときは $E=J$ を満たし, カイラルプライマリー演算子に対応するが, 非くりこみ定理を考慮すると, カイラルプライマリー演算子は以下の作用で定義される複素行列量子力学で基底状態にシューア多項式をかけて得られる状態に対応させられる.

$$S=\int dt\,\mathrm{Tr}\Big(\dot{Z}(t)\dot{Z}^\dagger(t)-Z(t)Z^\dagger(t)\Big).$$

ここで, 第 1 項は通常の運動項からきたもので, 第 2 項は S^3 の曲率との結合から生じる質量項である. これらの状態は $E-J=0$ を満たし, s 波をとったことにより $SO(4)$ の回転不変性を持ち, また R 対称性 $SO(6)$ のうち $SO(4)$ の下で不変である. すなわち, カイラルプライマリー状態は $R\times SO(4)\times SO(4)$ と半 BPS の対称性を持つ. 系は N^2 個の独立な調和振動子の集まりであるが, 今注目している状態に対しては Z の N 個の固有値の依存性のみが状態ごとに異なり, 状態の波動関数の固有値の依存性は (2) になっている. すなわち, カイラルプライマリー状態は 3 節で議論した 2 次元磁場中の最低ランダウ準位にある N 個のフェルミ粒子系の状態に対応する. 今, $\hbar$ は

弦の結合定数 g_s に相当し，AdS/CFT 対応では $g_s N =$ 一定で N が無限大の極限をとるので，古典極限を取っていることになる．電荷分布は行列模型の言葉では固有値密度になっている．巨大重力子，AdS 巨大重力子，カルザ・クライン重力子の状態に対する古典電荷分布はそれぞれ図 4，図 5，図 6 に与えられているものである．また，基底状態に対する電荷分布は図 2 に与えられている．

5. 泡状時空

最後に重力側に行き，話を完結させよう．リンとルーニンとマルダセナはカイラルプライマリー状態と同じ対称性を持つ IIB 型超重力理論の一般解を見出した[7]．ここで 10 次元の座標は t, y, x^1, x^2 と 2 つの 3 次元球面を表す 6 個の角度座標から成り，一般解はある線形微分方程式を満たす 1 つの関数 $w(x_1, x_2, y)$ によって特徴付けられる．この微分方程式を解くためには境界条件が必要であり，詳しい解析の結果，解がスムースであるためには $y = 0$ で与えられる (x^1, x^2) 平面上で w は 1/2 か −1/2 のどちらかの値しかとれないことがわかった．この (x^1, x^2) 平面上で 1/2 の領域を白，−1/2 の領域を黒に塗り分けてみると図 7 のような液滴の絵が得られる．逆にこのような絵を 1 つ与えると解が 1 つ得られる．例えば，図 2 (右) の液滴は $AdS_5 \times S^5$ に対応する．この場合この絵に単連結の黒い領域があることから可縮でない S^5 があることがわかる．一般に時空は液滴の配位に応じて可縮でないサイクル（泡，bubble）を含むことになり泡状時空（bubbling geometry）と呼ばれ，時空のトポロジーは液滴の配位によって決まる．また，時空の D3 ブレーンに対するフラックスは孤立する黒い領域や白い領域の面積に比例し，フラックスの量子化からこれらの面積の量子化が起きていることがわかる．今，図 2 (右) の液滴に近い液滴，すなわち $AdS_5 \times S^5$ に近い時空を考える．面積の量子化はこれらの液滴を 3 節と 4 節で考えたフェルミ粒子系の古典電荷分布に同一視してよいことを示唆するが，詳しい解析の結果実際

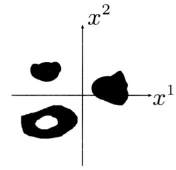


図 7　一般の液滴．

これは正しい．図 2 の液滴はゲージ理論側の基底状態に対応したが，泡状時空は確かに $AdS_5 \times S^5$ に対応する．また，図 4，図 5，図 6 の液滴に対応する泡状時空はそれぞれ巨大重力子，AdS 巨大重力子，カルザ・クライン重力子が $AdS_5 \times S^5$ 上にある時空を表し，ゲージ理論側での古典電荷分布との対応とぴたりと合っている．さらに図 2 の液滴の黒い領域は AdS_5 の中心で S^5 を (x^1, x^2) 平面へ射影したもの，白い領域は S^5 の '赤道' 上で AdS_5 を (x^1, x^2) 平面へ射影したものになっているのである．

こうしてゲージ理論のあるセクターを有効的に記述する行列模型の固有値が D ブレーンを表し，その固有値分布から時空の一部が出現していて，集積した固有値の集団的ゆらぎの運動が重力子，孤立する固有値（またはその '空孔'）がその時空上の D ブレーンを表すという描像が得られた．

参考文献

1) ここではレヴューとして P.H. Ginsparg and G.W. Moore, arXiv:hep-th/9304011 を挙げておく．
2) J. McGreevy and H.L. Verlinde, *JHEP* **0312** (2003) 054.
3) A.B. Zamolodchikov and A.l. Zamolodchikov, arXiv:hep-th/0101152.
4) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113].
5) S. Corley, A. Jevicki and S. Ramgoolam, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2002) 809.
6) D. Berenstein, *JHEP* **0407** (2004) 018.
7) H. Lin, O. Lunin and J.M. Maldacena, *JHEP* **0410** (2004) 025.
8) J. McGreevy, L. Susskind and N. Toumbas, *JHEP* **0006** (2000) 008.
9) A. Hashimoto, S. Hirano and N. Itzhaki, *JHEP* **0008** (2000) 051.
10) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B* **498** (1997) 467.
11) V. Balasubramanian, M. Berkooz, A. Naqvi and M.J. Strassler, *JHEP* **0204** (2002) 034.

（つちや・あさと，大阪大学大学院理学研究科）

AdS/CFT対応はどこまで確かめられているか

可積分性の役割



酒井　一博

1. はじめに

ゲージ重力対応の一つであるAdS/CFT対応は，この10年の素粒子理論，特に弦理論の分野で最も活発に研究されているテーマの一つである．AdS/CFT対応は，一言で言えば4次元のゲージ理論と10次元の超弦理論が等価であるという主張である．全く見かけの異なる2つの理論が同じものだという主張自体が驚くべきものであるが，その等価性を確かめる鍵として双方の理論の中にさらにまた別の理論の構造が浮かび上がってきた．それは統計物理の文脈で調べられてきた1次元可積分模型*1)である．

AdS/CFT対応における可積分性の研究に筆者が関わり始めて4年ほどになる．筆者の専門はもともと弦理論であるが，この4年はhep-th*2)にある弦理論の論文よりも，20年，30年前の統計物理，物性物理の論文から学んでいる時間のほうが多い気がする．弦理論の研究では，このように一見全く関係のないように見える分野の問題が研究の最前線に現れるということが度々あり，その奥深さには驚かされるばかりである．最近では，AdS/CFT対応の文脈で得られた成果が1次元量子可積分系の分野に新たな知見をもたらすというフィードバックも得られている．

この分野の研究は今から5年ほど前から急速に発展し，様々な方向への拡がりを見せている．ここではAdS/CFT対応の検証という観点から，中心となる流れをかいつまんで紹介したい．

2. AdS/CFT対応

本稿のテーマであるAdS/CFT対応をもう少し正確に述べておこう．AdS/CFT対応とは，4次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論と $AdS_5 \times S^5$ 時空上の10次元超弦理論の等価性を主張するものである．ゲージ理論すなわちゲージ場の理論は素粒子現象を記述する基礎理論である．ゲージ場とは大雑把には電磁場を一般化したもので，重力を除くすべての相互作用を担う．AdS/CFT対応では超対称性をもつゲージ理論を考える．超対称性とはボソンとフェルミオンとを入れ換える対称性のことである．世の中のあらゆる粒子はボソンまたはフェルミオンに分類される．例としては，光子はボソン，電子はフェルミオンである．$\mathcal{N}$ は超対称性が何種類あるかを表す．$\mathcal{N}=4$ は，4次元

*1)　素粒子物理の文脈において理論の次元と言えば，通常時間1次元と空間次元を合わせた時空の次元を指す．例えば4次元ゲージ理論は時間1次元＋空間3次元の時空，10次元超弦理論は時間1次元＋空間9次元の時空の上で考えている．これに対し，統計物理の文脈での理論の次元は空間次元のみを指すことが多い．本稿に現れる可積分模型はすべて時間1次元＋空間1次元の模型である．

*2)　90年代前半以降の素粒子理論関連の論文は，ほとんどすべてプレプリントサーバ http://arxiv.org/（日本のミラーサーバは http://jp.arxiv.org/）からダウンロードできる．"hep-th" は High Energy Physics - Theory の略で，素粒子理論関連の論文を収めたアーカイブ．例えば，参考文献1)は http://arxiv.org/abs/hep-th/0212208/ からダウンロードできる．

のゲージ理論で可能な超対称性の最大数となっている．

一方の超弦理論（超対称性をもつ弦理論）は通常の場の理論とは異なり，点粒子の代わりに1次元的な広がりをもつ弦を基本要素とする理論である．弦理論の時空の次元は，量子論的な整合性から特定の次元のみが許される．超対称性がある場合，10次元平坦時空が基本となる．AdS/CFT対応においては，曲がった背景時空を考える．AdS_5 は $1+4$ 次元の反ド・ジッター（anti-de Sitter）時空を表し，S^5 は5次元球面を表す．AdS_5 は $1+4$ 次元の負の定曲率空間，S^5 は5次元の正の定曲率空間，と言うこともできる．一般に超弦理論を曲がった時空の上で考えると，保たれる超対称性の数が減るのであるが，$AdS_5\times S^5$ は非常に対称性の高い時空で，平坦時空と同数の超対称性を保つことが可能である．この意味で，$AdS_5\times S^5$ は平坦時空に次いで基本的な時空と言える．

このように，AdS/CFT対応で比較されるゲージ理論，弦理論は許される最大限の超対称性をもつ．（具体的には，この超対称性の代数はスーパーリー代数 $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ で表される*3)．）このことが可積分性の存在に大きく関わっている．また，見かけが異なる2つの理論を比較するには，この共通の対称性を手がかりに，対称性変換の下での保存量を見ればよい．具体的にはゲージ理論のスケーリング次元（後述）と弦理論のエネルギーとの対応が一番の基本となる．

3. AdS/CFT対応の特徴——強弱対応

AdS/CFT対応を初めとするゲージ重力対応では，ラージ N 極限を考える．N はゲージ理論におけるカラー数を表す．例えば強い相互作用を記述する量子色力学（QCD）では $N=3$ である．AdS/CFT対応の主張には様々な段階があり，最も強い主張としては $1/N$ 展開まで含めた対応を考えるが，本稿では可積分性が確認されている $N\to\infty$ の場合のみを考える．

ラージ N 極限のゲージ理論においては，もともとあるゲージ結合定数 g_{YM} に代わってトホーフト（'t Hooft）結合定数 $\lambda=g_{\mathrm{YM}}^2N$ が相互作用の強さを表す．一方で弦理論においては，ラージ N 極限では10次元時空での弦どうしの相互作用がなくなる．これは $AdS_5\times S^5$ 時空を飛ぶ弦が途中で分かれたりせず，初めから終わりまで常に一本ということである．弦が時間発展とともに時空に描く軌跡を世界面と呼ぶ．今の場合，閉じた弦が描く世界面は円柱面のようなチューブ型のトポロジーをもつ．超弦理論は10次元時空をもつ理論であったが，世界面のトポロジーを特定した後の弦の物理は世界面上の場の理論で記述できる．$AdS_5\times S^5$ 時空を背景とする場合，この理論は相互作用をもつ2次元の場の理論となる．AdS/CFT対応の主張に従えば，世界面上の相互作用の結合定数は $\lambda^{-1/2}$ で与えられる．

さて，ここにAdS/CFT対応の重要な特徴を見ることができる．一般に結合定数が0の場の理論は，自由場の理論であり，簡単に解くことができる．結合定数が小さい，すなわち弱結合の場合も，自由場の理論からの摂動近似によって理論の性質を調べることができる．しかしながら結合定数が大きい，すなわち強結合の場合，摂動近似が有効性を失い理論の性質を調べるのが難しくなる．AdS/CFT対応の両側を見比べてみると，ゲージ理論では λ が小さいときに弱結合であるのに対し，弦理論では反対に λ が大きいときに弱結合となる．つまり一方の理論が弱結合のときもう一方の理論は強結合となっており，通常の摂動論のみでは比較が困難なのである．

このような事情にも関わらず，実はAdS/CFT対応を部分的に確かめることはできた．これはBPS状態の存在によるところが大きい．BPS状態とは

*3）なじみのない読者は，リー代数の名前は回転などの連続的な対称性の種類を表すと思ってもらえればよい．5次元球面 S^5 を色々な方向に回す変換は群をなす．これは $SO(6)$ というリー群である．$SO(6)$ 群の無限小変換は交換子による積に関して閉じた代数をなす．これをリー代数 $\mathfrak{so}(6)$ と表す．同様に AdS_5 の回転群は $SO(4,2)$ と表され，そのリー代数は $\mathfrak{so}(4,2)$ である．$\mathfrak{so}(4,2),\mathfrak{so}(6)$ はそれぞれ $\mathfrak{su}(2,2),\mathfrak{su}(4)$ に同型で，これらと超対称性変換とを組み合せた全体が $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ である．

超対称性のある理論に特有の状態で，部分的に基底状態の性質を持ち，繰り込みによる量子補正を受けない．つまり λ 依存性を持たない状態である．このためBPS状態に限るならば，摂動近似の有効範囲を気にすることなく，ゲージ理論側と弦理論側で厳密な比較が可能だったのである．

これだけでも様々な興味深い結果が引き出せる一方で，BPS状態の物理はあくまでもキネマティクスであり，ゲージ理論や弦理論の静的な側面しか見ていないとも言える．これに対し動的な側面，すなわちダイナミクスも含めたAdS/CFT対応を確かめることは可能だろうか？ 摂動論では一般の λ の値における解析が困難なためにともすると遠い目標と思われていたこの問題が，近年の研究の進展により現実に解かれようとしている．ブレークスルーとなったのが，本稿のキーワードである可積分性の発見である．

4. ゲージ理論における 1 ループ可積分性

4次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は共形場理論であることが知られている．共形場理論は理論に特定の質量スケールが存在せず，スケール変換（別名ディラテーション）について不変である．すなわち，4次元時空の座標 x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ を $x^\mu \mapsto \Lambda x^\mu$ と定数倍しても理論の性質が不変に保たれる．理論を調べる上で基本となるのは，スケール変換に対して

$$\mathcal{O}(\Lambda x^\mu)=\Lambda^{-\Delta}\mathcal{O}(x^\mu) \qquad (1)$$

のように共変的に振る舞う局所演算子 $\mathcal{O}(x^\mu)$ である．Δ を演算子 $\mathcal{O}$ のスケーリング次元と呼ぶ．

局所演算子の具体形を見てみよう．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論は，ゲージ場 A_μ に加えて，これと超対称性変換によって結びつく 4 つのフェルミオン場 $\Psi_1,\cdots,\Psi_4$，3 つの複素スカラー場 X,Y,Z からなる理論である．局所演算子はこれらの場を組み合せて作ればよいのだが，その際シングルトレース演算子と呼ばれるものを考える．シングルトレース演算子とは，例えば

$$\mathcal{O}=\mathrm{Tr}\,ZZZZZXXZZXZXXXX \qquad (2)$$

のようなものである．$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論では X や Z などを含めすべての場は $N\times N$ エルミート行列に値をとっており，上の式は行列の積のトレースを表している．トレースをとることで，ゲージ変換の下で不変となる．一般にはこれらを掛け合せたマルチトレース演算子も考えられるが，ラージ N 極限での計算には必要ない．

さて，上ではあからさまには書かなかったが，X や Z などの場は時空の各点において定義されている．すなわち正確には $Z(x^\mu),X(y^\mu),\cdots$ などと表すべきであり，一般にはシングルトレース演算子を構成している各々の場は別々の点 $x^\mu,y^\mu,\cdots$ から持ってきてもよい．すべて同じ点から持ってきたものを局所演算子と呼ぶ．非局所演算子の場合も，各構成要素の場を

$$X(y^\mu)=X(x^\mu)+(y^\nu-x^\nu)D_\nu X(x^\mu)+\cdots \qquad (3)$$

などと 1 つの点 x^μ の周りで展開することで，局所演算子の和に分解できる．このとき微分がかかった場が現れる．考え方としては，シングルトレース演算子のなす空間の基底を局所演算子のみで張ることにして，代わりに微分のかかった場 $D_\nu X, D_\nu D_\rho X,\cdots$ などを元の場 X とは独立な構成要素とみなすということである．(2) 式はスカラー場 X,Z のみからなり微分も含まない単純な例であったが，一般に局所シングルトレース演算子の構成要素としては先に挙げたゲージ場，フェルミオン場，スカラー場に加えてこれらの微分をすべて含めたものとなる．微分は何回でも作用させることができるので構成要素は無限個あることになるが，実はこれらは超対称性代数 $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ の最高ウェイト表現としてひとまとまりになっている．つまり，例えばスカラー場 Z から出発して超対称性代数の変換を繰り返し作用させてゆくことで，他のすべての構成要素が得られる．

こうして作った複合演算子にスケール変換を施してみよう．古典的には，このような演算子はすべてスケール変換に対して共変的に振る舞う．ス

$$\mathcal{O} = \mathrm{Tr}\, ZZZZZXXZZXZXXXX$$

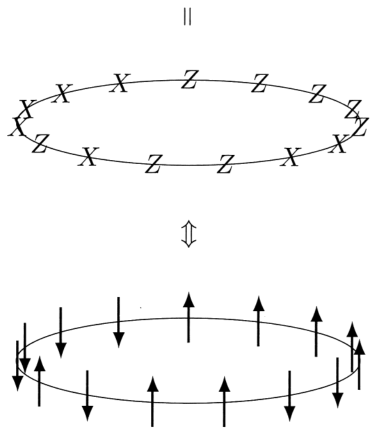
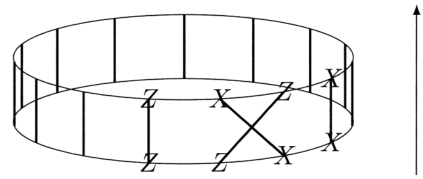


図 1　シングルトレース演算子とスピンチェイン．

$$\mathcal{O}' = \mathrm{Tr}\, ZZZZZX\underbrace{ZX}ZXZXXXX$$



$$\mathcal{O} = \mathrm{Tr}\, ZZZZZX\underbrace{XZ}ZXZXXXX$$

図 2　1 ループ摂動における相互作用の例．スケール変換による発展（スピンチェインの時間発展）の様子を矢印の向きに並べて描いている．演算子 $\mathcal{O}$ にスケール変換を施すと，演算子 $\mathcal{O}'$ のような異なる演算子が生じる．

ケール変換生成子（別名ディラテーション生成子）の固有状態となっている，と言うこともできる．スケーリング次元は，ゲージ場，スカラー場，微分に $\Delta = 1$，フェルミオン場に $\Delta = 3/2$ を割り振って，単純にその総和をとることで与えられる．

ところが量子補正を考えると，スケール変換に繰り込みの効果が加わるため，話はこのように単純ではなくなる．例えば一番簡単な 1 ループの摂動（1 次の摂動をこう呼ぶ）では，4 点相互作用により隣り合う場の入れ替えが起こる．このため勝手な複合演算子にスケール変換生成子を作用させると，一般に別の複合演算子の和に移り変わる．よって，(1) 式のようなスケール変換生成子の固有状態を得るには，複合演算子の適当な線形結合をとる必要がある．言い換えると，単純に場を並べて作った複合演算子の基底に対して，スケール変換生成子は量子論では非対角となる．スケーリング次元と固有状態を求めるためにはスケール変換生成子の対角化問題を解く必要がある．

複合演算子のサイズが大きくなれば行列のサイズも飛躍的に大きくなり，実際問題として対角化を遂行するのは絶望的に思える．しかしながら $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の 1 ループ摂動の場合には，実はこの問題が系統的に解けるのである．

この結果を紹介するために，シングルトレース演算子と統計物理で知られている 1 次元スピンチェインとの類似性を説明しよう．シングルトレース演算子は，構成要素の場が行列の積として円周状に並んだ構造をしている．これを，各々の場をスピンとみなし，スピンの 1 次元的な連なり（スピンチェイン）と解釈するのである（図 1）．場の種類は，スピンの様々な向きを表すと考える．シングルトレース演算子のスケール変換は，スピンチェインの時間発展と読み替える．すなわち，ゲージ理論のスケール変換生成子をスピンチェインのハミルトニアンと見なすのである．スケール変換によって複合演算子の構造が変わると述べたが，1 ループ摂動の場合，一度に変化するのは 1 カ所の隣り合う構成場の状態のみである（図 2）．これはスピンチェインの最近接相互作用と翻訳できる．

シングルトレース演算子の構成場は超対称性代数の 1 つの表現をなすことを述べたが，この事実を利用すると，1 ループ摂動のスケール変換をひとまとめに評価でき，スピンチェイン描像でのハミルトニアンの具体形が求まる．これが実は非常に特別な形をしており，可積分性をもつ等方的スピンチェインのハミルトニアンであることが示されたのである[1,2]．

可積分性を持つ 1 次元スピンチェインは長い研究の歴史を持ち，ベーテ仮設（Bethe ansatz）の方

法を用いて解くことができる．紙数の都合上ベーテ仮設法の説明は割愛せざるを得ないが，乱暴を承知で一言で述べるならば，波動関数の形を平面波のある特定の重ね合わせの形に仮定することで，ハミルトニアンの固有値問題がベーテ方程式と呼ばれる連立代数方程式の問題に帰着するという仕組みである．ベーテ方程式の解の性質はよく調べられており，また少なくとも近似的には数値計算をすれば求められる．いずれにせよ，このようにして1ループ摂動の範囲では，スケーリング次元のスペクトルの全貌が分かるのである．

5. 弦理論における古典可積分性

前節では1ループ摂動近似，すなわち λ が非常に小さい場合に可積分性が現れ，スケーリング次元のスペクトルが求まることを見た．本節では λ が非常に大きい場合，すなわち弦理論の古典近似が有効な場合を見てみよう．

3節で述べたように，世界面を固定したとき，弦理論は2次元の場の理論とみなせる．具体的には，2次元の世界面を10次元時空に埋め込む写像を場とみなし，この場を用いて世界面の面積を表したものを作用汎関数とするような理論である．これは非線形シグマ模型と呼ばれるものである．超弦理論は世界面上にフェルミオン場を持つため，世界面を埋め込む先（標的空間）は $AdS_5 \times S^5$ そのものではなく，これを拡張した

$$\frac{PSU(2,2|4)}{SO(4,1) \times SO(5)} \tag{4}$$

という群多様体の商空間で表される．

シグマ模型の作用汎関数から運動方程式が求まるので，古典論としての問題はこの運動方程式を解くことに帰着する．運動方程式は2階の非線形微分方程式のため，一般解を求めるのは通常は困難である．しかしながら，古典可積分系の研究においてこのような2階の非線形微分方程式が解ける例がたくさん知られている．このような例においては，運動方程式を与える2階の非線形微分演算子が，ラックス対（Lax pair）と呼ばれる2つの1階線形微分演算子の交換子積の形に「因数分解」できて，一般解を構成することができる．今の場合にも，標的空間が群多様体の商空間であることを利用し，ラックス対が構成できることが分かった[3)]．この意味で $AdS_5 \times S^5$ 上の弦理論は古典的に可積分性をもつ．

運動方程式の解は無数にあるが，このうち物理的に興味があるのは，有限ギャップ解と呼ばれる有限個の振動モードをもつ準周期解である．有限ギャップ解はベーカー・アヒエゼール（Baker–Akhiezer）関数を用いて表される．ベーカー・アヒエゼール関数は一般化テータ関数を用いて書かれており具体形は繁雑であるが，この関数が定義されるリーマン面は代数曲線として表すことができ，具体的に構成できる．運動方程式の個々の解に付随するこの代数曲線は，スペクトル曲線と呼ばれる．スペクトル曲線が分かると，解の具体形を求めずとも，保存量を求めることができる．特にAdS/CFT対応を見る目的の上では，エネルギーを初めとする保存量が求まればよいので，スペクトル曲線が十分な情報を与える．実際に $AdS_5 \times S^5$ 上の古典弦理論について，スペクトル曲線の意味で一般解が構成され，解の分類がなされている[4)]．

6. 粒子模型の描像と量子可積分性

4節と5節で λ が大小両極端の場合に可積分性が現れることを見た．このとき λ の値の中間領域でも可積分性を期待するのは自然であろう．

ゲージ理論側におけるスピンチェインの描像は高次の摂動を加えた場合にも拡張できるので，この場合にも何らかの可積分なスピンチェインが対応するのではないかとの期待があったが，様々な問題があることが分かった．例えば2ループ以上の摂動近似では，繰り込み補正の中に3つのスカラー場が2つのフェルミオン場に変化するような相互作用が現れる．このためスピンチェインの長さが変わってしまうのだが，知られているスピンチェインにそのようなものはない．

この問題を巧妙に回避すべく考え出されたのが，

無限に長い複合演算子と粒子模型の描像である．長さの変動が問題なら，まずはその影響が無視できる状況で定式化しようというアイデアである．スピンチェインをベーテ仮設法により定式化する際は，強磁性真空から出発する．強磁性真空とはスピンがすべて同じ向きにそろった状態のことである．これに対応するゲージ理論の複合演算子は

$$\mathrm{Tr}\, Z^L \tag{5}$$

と書ける．今は長さ L を無限大にとって

$$\cdots ZZZZZZZZZZ \cdots \tag{6}$$

と無限に続く演算子を「真空」とみなす．トレースはしばらく忘れることにする．この演算子に別の場が 1 つ，2 つ，と混じったものを 1 粒子状態，2 粒子状態，と考える．例えばスカラー場 X, Y が 1 つずつ混じった漸近 2 粒子状態として

$$\sum_{n_1<n_2} e^{ip_1 n_1 + ip_2 n_2} \times (\cdots ZZ\overset{\overset{n_1}{\downarrow}}{X}ZZ \cdots ZZ\overset{\overset{n_2}{\downarrow}}{Y}ZZ \cdots) \tag{7}$$

が考えられる．このように位置をずらすごとに決まった位相をかけて足し合せることで，スケール変換生成子の固有状態が作れる．このとき，p_1, p_2 はそれぞれ「粒子」X, Y の 1 次元運動量と解釈される．この描像は，スピンチェインにおけるマグノンの描像（同じ向きのスピンの中に単体で混じった別向きのスピン）と基本的に同じである．

次にこの真空の上での励起の種類について，もう少し詳しく見てみよう．$\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論にはもともと $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ 対称性があったが，(6) 式で表される真空上では一部が自発的に破れて $\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ の対称性のみが残る．X や Y などの場は，もともとは $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ 代数の無限次元表現に属していたが，対称性が破れた後では 2 つの $\mathfrak{psu}(2|2)$ それぞれに関して 4 次元表現，すなわち全体としては $\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2)$ の $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4}$ テンソル積表現に属する．これらは (6) の真空上の素励起となっている．これら $4 \times 4 = 16$ 種類以外の場は，より大きな表現に属する複合励起と考えられる．

4 次元ゲージ理論の場をあたかも 1 次元空間を動く粒子のようにみなすという描像はいささか突飛に思えるが，弦理論の側からは粒子描像は自然に理解できる．弦理論の定式化には様々な方法があるが，現段階でゲージ理論との比較に最も適している方法*4) をとると，世界面の場の量子論は非相対論的な粒子の理論となる．この場合，先のゲージ理論の場合と同じように自発的対称性の破れが起こり，基本粒子は $\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2)$ 代数の $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4}$ 表現に属することが分かる．

ゲージ理論の演算子の長さ無限大の極限は，弦理論では無限に長い弦を考えることに対応する．先ほどトレースを忘れると述べたが，これは弦理論側では世界面の周期境界条件を忘れることに対応する．「忘れる」というのは，量子化の途中過程において解のなすヒルベルト空間をいったん拡張しておき，最後に境界条件を課して物理的な状態を選別するという意味である．この拡張の結果として，$\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2)$ 対称性の中心拡大が起こる．実はこの中心拡大された対称性が，可積分性の議論に大きな役割を果たす．

ゲージ理論の粒子模型描像において，中心拡大された $\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2)$ 対称性の 1 粒子状態への作用を調べると，粒子の運動量 p とエネルギー E の分散関係

$$E = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2} \sin^2 \frac{p}{2}} \tag{8}$$

が導かれる[5)]．この分散関係式は試行錯誤により以前から予想されていたもので[6)]，λ で展開した 1 次の項は 1 ループの結果，すなわち通常のスピンチェインのマグノンの分散関係式を与える．また運動量 p が小さい場合には相対論的粒子の分散関係式となって，実は平坦波極限で解かれている弦理論の結果とも一致する．

さらに中心拡大された $\mathfrak{psu}(2|2) \oplus \mathfrak{psu}(2|2)$ 対称性は，2 粒子の散乱行列（S 行列）の形を全体の係数を除いて完全に決定する[5,7)]．基本粒子の表

*4） グリーン・シュワルツ（Green–Schwarz）形式におけるユニフォームライトコーンゲージ固定．

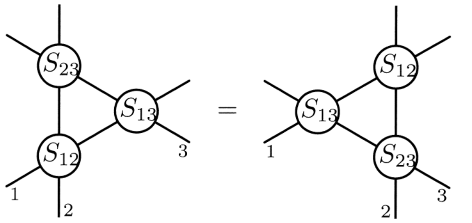


図3 ヤン・バクスター関係式．S_{ij} は粒子 i と粒子 j の 2 体散乱行列を表す．

現が，2 組の $\mathfrak{psu}(2|2)$ 代数の **4** 表現のテンソル積に分解していることを反映して，2 体の S 行列も 2 組の 16×16 行列のテンソル積の形に表される[*5]．この S 行列の重要な性質は，ヤン・バクスター (Yang–Baxter) 関係式 (図 3) を自動的に満たすことである．これは 2 体散乱を組み合せて多体散乱を構成するときに，組合せの順序によらず同じ多体散乱行列が得られることを意味する．ここで逆にすべての散乱が 2 体散乱に分解できると仮定をおくならば，結局模型の性質は 1 粒子の分散関係と 2 粒子の散乱行列に帰着される．この場合ベーテ仮設の方法により系統的にスペクトルを求めることができる[8]．

このように，一般の λ での量子可積分性の姿が明らかになってきたが，S 行列の全体係数の関数形だけは決まらずに残っていた．これについても，弦理論，ゲージ理論双方の摂動計算に基づき様々な試行錯誤が行われていたが，ごく最近になって正しいと思われる解が決定された[9,10]．この解を得るプロセスには様々な仮定が含まれているものの，解そのものはゲージ理論側の 4 ループ計算の結果を再現し，弦理論側の半古典量子化とも整合している．さらに，この解も実は弦理論やゲージ理論の具体計算に頼らずに，可積分模型の手法のみを用いて導出できると思われる[11,12]．

*5) この 16×16 行列は，実は物性物理の分野で前から知られているものであることが判明した．強相関電子系を記述する基本的な模型として，ハバード (Hubbard) 模型がある．1 次元のハバード模型は可積分性を持つのだが，それを証明する過程でこの行列と本質的に同じ行列が用いられるのである．シャストリー (Shastry) の R 行列と呼ばれるこの行列は試行錯誤の上に見出されており，その代数的な背景はよく分かっていなかったのだが，上述のように中心拡大された $\mathfrak{psu}(2|2)$ 代数に基づけばこの行列を導出できる．AdS/CFT 対応を研究していたら思わぬ副産物として，未解決だった 1 次元ハバード模型の代数的定式化の道筋が見えてきた．

7. おわりに

結合定数 λ の任意の値において有効な可積分粒子模型が得られたことは，特筆すべき成果と言えるだろう．この模型は，ラージ N 極限，さらに演算子あるいは弦の長さが本質的に効いてこない場合について，今のところゲージ理論，弦理論の知られている結果とすべて整合している．一方で，この模型によりゲージ理論，弦理論のスペクトルが完全に尽くされるかどうかは分かっていない．この意味でゲージ理論，弦理論が量子論的な意味でも本当に可積分かどうかは未解決であるが，いずれにせよ BPS 状態の対応を越えて，ダイナミクスを含めた AdS/CFT 対応が確立しつつあるのは間違いない．今後も一層の進展が期待される分野である．

参考文献

1) J.A. Minahan and K. Zarembo, *JHEP* **0303** (2003) 013 [arXiv:hep-th/0212208].
2) N. Beisert and M. Staudacher, *Nucl. Phys. B* **670** (2003) 439 [arXiv:hep-th/0307042].
3) I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 046002 [arXiv:hep-th/0305116].
4) N. Beisert, V.A. Kazakov, K. Sakai and K. Zarembo, *Commun. Math. Phys.* **263** (2006) 659 [arXiv:hep-th/0502226].
5) N. Beisert, arXiv:hep-th/0511082.
6) N. Beisert, V. Dippel and M. Staudacher, *JHEP* **0407** (2004) 075 [arXiv:hep-th/0405001].
7) N. Beisert, *J. Stat. Mech.* **0701** (2007) P017 [arXiv:nlin.si/0610017].
8) N. Beisert and M. Staudacher, *Nucl. Phys. B* **727** (2005) 1 [arXiv:hep-th/0504190].
9) N. Beisert, R. Hernández and E. López, *JHEP* **0611** (2006) 070 [arXiv:hep-th/0609044].
10) N. Beisert, B. Eden and M. Staudacher, *J. Stat. Mech.* **0701** (2007) P021 [arXiv:hep-th/0610251].
11) K. Sakai and Y. Satoh, arXiv:hep-th/0703177.
12) K. Sakai and Y. Satoh, arXiv:0709.3342 [hep-th].

（さかい・かずひろ，慶應義塾大学日吉物理学教室）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

窪田 高弘

十年ひと昔

大正時代末に第三高等学校の学生だった朝永振一郎氏は，その当時の思い出を綴った随筆の中で次のように書いておられる．

「…講義では，ボーアの理論がさも新しいもののように話された．これはとても革命的な新理論で自分にもよく理解できない，と化学の先生は話をした．けれども考えてみれば，それはそのときすでに十年前に出ていた古い理論であった.」

旧制高等学校の学生が，皆ボーアの理論を古いと感じたとは思えないが，当時の量子力学建設の興隆は，朝永青年にはまさに疾風怒濤の勢いに映じたことであろう．昭和の初め頃から量子力学に関する名著が少しずつ刊行され始める．

量子力学の揺籃期と比較して，現在の素粒子論発展の歩調はいかがであろうか．過去二十数年の間に，超弦理論の研究者は，究極の理論としての超弦理論に対する期待の高まりを何度か経験した．1980 年代の高揚期には，M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten (GSW) の “Superstring Theory” (vol.1, 2) が出版され，90 年代に D–brane というアイディアが出た直後には J. Polchinski の “String Theory” (vol.1, 2) も出版された．この特集号のテーマである J. Maldacena の AdS/CFT 対応の論文が現れた 10 年ぐらい前にも，私を含めて多くの人が新しい潮流を感じ取ったけれども，しかし AdS/CFT 対応そのものについての名著はまだ世に出ていないように思われる．この特集号に関連した「名著」について書くとしても，AdS/CFT 対応からはやや距離をおいて，超弦理論，重力理論，ゲージ理論に関する著書について述べることをお許し頂きたい．

超弦理論に関してはすでにたくさんの教科書が書かれているけれど，若い研究者がまず手にするのは上に述べた GSW および Polchinski のものであろう．私の場合，とりわけ前者に愛着を感じる．というのは，15 年くらい前に大学院の「素粒子物理学特論」という講義を担当したとき，この GSW の本を教科書とし，講義の準備のために私自身精読しようと努めたからだ．大学院学生に教えるというよりも自分自身勉強したいという気持ちが強かったので，学生には迷惑であったかもしれない．かなりのスピードで講義をし，15 回の講義で第 1 巻の 9 割くらいを解説したと記憶している．

一般相対性理論，重力理論に関しても名著が多いが，私が親しみを感じるのは S. Weinberg の “Gravitation and Cosmology” である．相対性理論の本にありがちな哲学過剰，数学的装飾の過多といったことがこの本にはなく，実験や観測との緊張関係を維持しようとしている点が私の好みにあっていた．Brans–Dicke 理論が述べられているのもこの本の特徴である．宇宙論の記述は今となっては古めかしいけれど，素粒子論と宇宙論の交流が盛んになり始めた頃，多くの人がまずは Weinberg の本を読んだはずだ．

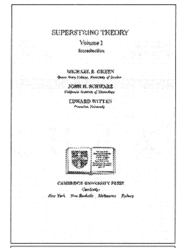
いわゆる団塊の世代やそれに続く世代の素粒子論研究者は，大学院学生の頃にゲージ理論の急激な発展の洗礼を受けた．とりわけその発展の若き旗手であった G. 'tHooft の論文は，皆かじるようにして読んだ．私もかなり遅れて'tHooft の一連の論文を読んだが，それらは一様に難解であった．彼の論文の特徴は，新しい物理的なアイディアに計算の技術が伴っている点にあり，迫力がある．いわば一点突破型の彼の原論文や，彼自身がいろいろな場所で行った講義の記録集が “Under the Spell of the Gauge Principle” である．'tHooft の講義録は教科書スタイルとは言えないが，私にとっては名著の一つに数えたい一冊である．

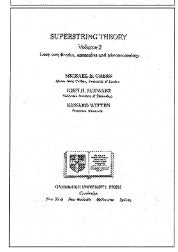
1970 年代は，ゲージ理論の様々なアイディアが実に豊富に産み出された時代であった．しかしそれは大分後になってからの感想であって，当時はジャングルの中を彷徨しているような気持ちだった．現在の素粒子論，超弦理論も案外同じような情況なのかもしれない．一見無関係に見える様々なアイディアが一気に一つの流れに合流していくということがあるかも知れない．超弦理論がさらなる発展を遂げ，AdS/CFT 対応は「すでに○○年前に出ていた古い理論であった」と言える日が早く来てほしいものである．

（くぼた・たかひろ，大阪大学大学院理学研究科）

Superstring Theory (volume 1 and 2)

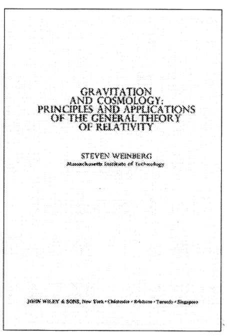
M.B. Green, J. Schwarz and E. Witten, Cambridge University Press, 1987





1980年代の超弦理論は，先行する双対共鳴模型の時代とは相違して，2次元の場の理論としての側面，超対称性をもった共形場理論としての特徴が強調される傾向にあった．この本の第1巻には，そのような時代の傾向が敏感に反映されている．第2巻では，当時の素粒子論研究者にはあまり馴染みのなかった，現代的な幾何学の手法を積極的に取り入れようとする，著者たちの意気込みが感じられる．その後，数多く出版された超弦理論の教科書の中にあって，依然として異彩を放つ本である．

Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity

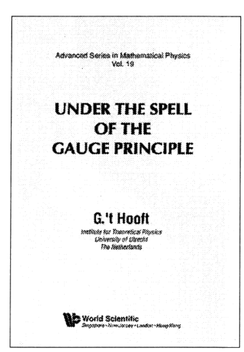


S. Weinberg, John Wiley and Sons, 1972

1970年頃までに書かれた一般相対性理論の本は，理論の論理構造とか数学的な興味に重きを置いたものが多く，実験や観測との関連を強く意識したものは少なかった．昭和46年に出版された故平川浩正先生の『相対論』(共立出版）は数少ない例外であったが，それでも初期宇宙論は表面的な取扱いにとどまっていた．素粒子論の研究に集中していたWeinbergが，宇宙マイクロ波背景輻射の発見に強い刺激を受けていたことは，彼の啓蒙書 "The First Three Minutes" (Basic Books, 1977) からも明らかである．Weinbergは，この本を書いた1972年当時，初期宇宙論に素粒子論を持ち込む新しい学問の潮流を，すでに直感的に予想していたのではなかろうか．この本は，そういう著者の開拓者的精神が盛り込まれた味わい深い本である．

Under the Spell of the Gauge Principle

G. 'tHooft, World Scientific Pub. Co., 1994



1970年代における場の量子論の劇的な復活は，当時まだ大学院学生だったG. 'tHooftの論文に多くを負っている．この本は，'tHooftの論文や講義録を部分的に集めたものである．CERNから出された黄色い表紙の "DIAGRAMMAR" もこの本の中に収録されているが，この論文を懐かしく思い出す人もいるだろう．インスタントンにおける驚異的な腕力による計算の論文も入っている．彼の論文は，精密な計算を精力的にこなす一方で，場の理論におけるトンネル効果とか，Large N 極限，非可換ゲージ場理論での磁気単極子といった新しい考え方を持ち込むものも多く，今読んでも実に教訓的な内容の本である．

特集／ゲージ重力対応

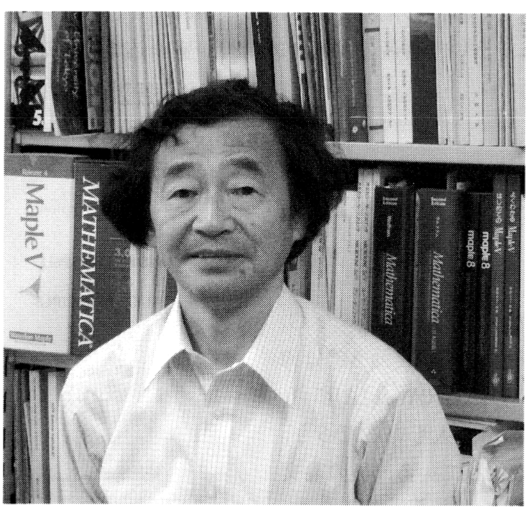
ストリング理論は面白くて深い

米谷　民明（聞き手：編集部）

1. ゲージ重力対応の問題点と研究の醍醐味

――今回のテーマである“ゲージ重力対応”について，特集では様々な角度から解説していただいておりますが，今まで別なものとして考えられていた理論が，互いに関係性をもっていることがわかってきた，ということは非常に興味深い話ですね．

そうですね，ゲージ重力対応というのは，一つの物理を全く異なった言葉で記述できるという性質ですが，とくに面白いのは，一方では難しい所を，もう一方では易しく記述できるということなんですね．だからこそ，逆にそれを証明するのが難しいんです．



米谷民明氏

2つのものが同等だということは，2つのものそれぞれの論理構造からちゃんとその関係性を厳密に導けなければなりません．場の理論というのは非常に難しい理論で今のところはなかなかちゃんとは解けません．実際にある量を何らかの近似や仮定の下で計算して結果を比較して一致するかどうかを調べるしか，今のやり方では方法がないのです．

双方で厳密に計算できる量を比較できればいいのですが，お互いの近似なり仮定なりの有効性が重なっていない場合はどうやって比較していいかわからないわけです．しかし，この対応を仮定すれば，一方の理論で難しい所をもう一方の理論の易しい方法で表現して予言できるかもしれないわけです．今回の特集では，そうした話をいろいろな角度から取り上げています．例えば，互いに違った領域で計算したものをどこまで比較できるかという話や，比較できると仮定してみたらどういう結果が出るかという議論や，それらの中間的な話など，いろいろありますので，詳しくはそれぞれの解説をご覧いただきたいと思います．

2. 研究の未来予想

――そうしますと，ゲージ重力対応の研究はこれから先どういった方向に進みそうでしょうか．

これまで重力理論とは無関係と思われていたもの，例えばQCD（量子色力学）や原子核理論，ハドロン物理などに重力理論が使われるようになってきたということは非常に目覚ましいことです．ですから，今までは重力理論にあまり関心のなかった人がだんだん認識し出し，これからも発展するにしたがって認識が広がっていくでしょう．場合によっては，今までQCDでは解けなかったことが解けたり，重力理論およびストリング理論にそれがはねかえって新しい発展につながる，というようなことが出てくるかもしれません．

ストリング理論自体はもう30年を超える歴史があるのですが，物理学を考える上で一種の枠組みとしても大きなものをいろいろ提供しつつあるのではないかと思います．19世紀にニュートン力学が発展して，その構造をもとに解析力学の枠組みができて量子力学につながったように，ストリング理論としてこれまで築きあげてきたものによって，物理学の基本原理を総合する枠組みが完成するのではないかと思います．場合によっては，物性物理の方面にも応用されていく可能性もありますし，現にそういうことを考えている人もいます．最近では，量子情報と関係するエンタングルメントという概念に関連する新しい見方も出てきています．こういった話が深まっていけば，概念的にも量子力学の解釈問題などにも何か示唆を与えることにつながるかもしれません．今後どういうふうに進展するかは本当に興味深いことです．

3. 国内外の研究者

――ゲージ重力対応の研究も含めて，ストリング理論に関する研究者の現況をお聞かせいただけますでしょうか．

こうした研究にはいろいろな人が様々な形で寄与していますが，国内外も含めて最も活発に研究がなされているのは，やはり何と言っても米国でしょう．ストリング理論はその成立時から，日本人研究者も様々な本質的な貢献をしています．研究を進めるバイタリティーの面では米国に追いつくのは少し厳しいところがあるのは否めないにしても，日本から，彼らには思いつかないようなオリジナルなアイデアの面で十分発信してゆけるし，そういう日本の長所を生かして世界をリードすることは十分に可能だと思います．まだもやもやとしていてこれからの方向性がはっきりしていない面も多いので，こうした混沌とした状況が逆にいろいろな新しいことをやるチャンスかもしれません．

世界的には毎年 String Conference という国際会議が開かれていますが，そうした状況をみる限りでは，世界的には何らかの形でストリング理論に関する研究をしている人は，1000 人から 2000 人はいるのではないでしょうか．日本では学生を含めれば 100～150 人ほどではないかと思います．毎年 3 月に高エネルギー加速器研究機構で，主にストリング理論を中心にした研究会がありますが，その参加者も大体 100 人前後の研究者が集まっています．

4. どんな道を歩むべきか―研究者の心得

――世界的にも多くの研究者が取り組まれているようですが，そういった道を歩む上で必要と思われる研究者としての条件，もしくは心得のようなものをお聞かせいただけますでしょうか．

こうした研究をしていくには，当然場の理論や相対論などへの理解の積み重ねが大切ですし，いろいろなことを知らなければなりませんから，そういった意味では学生さんには重荷であるかと思います．研究に本格的に入っていくまでの準備には，時間もある程度必要なことです．長い歴史を経て現在の弦理論に達したわけですので，一口に

弦理論と言っても様々な側面があり，かつ非常に奥深いものです．ですので，焦らないということが大切だと思います．今回のテーマで言えば，ゲージ理論や重力理論といったそれぞれの理論の内容を深く理解したり，それぞれの問題点や限界を把握していくことが大切です．

例えば，学部生ならば物理や数学の基礎的な知識・素養・テクニックをしっかり身につけることがまず大切です．プロの研究者になるには意欲や憧れだけでは難しいと思います．やはり強い憧れと同時に，物理や数学の様々な面にわたる素養やテクニックを身につける，またその人独自の視点やこだわりも必要です．ただし，初心者の段階では，いろいろな人の意見や新しい考え方を素直に取り入れて向上していける，一言で言うなら，情熱と根気，そして木を見ると同時に森を見るようなバランス感覚が大切だと思います．

研究者というのはいろいろなタイプがあっていいと思いますが，やはりある程度はこうした両方の力は必要だと感じます．勘だけよくても駄目ですし，きっちりステップを踏んで確かめていける根気も必要ですね．また，計算がどんなに得意でも，計算の意味づけや直観的に何かを結びつけたりすることができないと研究が進みません．欲を言えばきりがないですが，人それぞれ持って生まれたものがありますので，いい形で持ち味を活かしていけるといいですね．

5. 影響を受けたもの

——先生が研究者になるにあたって影響を受けたものは何でしょうか．

そうですね，小さいときからアインシュタインや相対性理論には憧れのようなものを持っていましたね．高校生ぐらいのころから早く一般相対性理論などを理解できればいいなあと思っていましたし，アインシュタインの『相対論の意味』という本を買ってきて読んだりもしました．場の方程式などを見てもよくはわかりませんでしたが，何か美しくて深い意味がありそうな式だなあと，高校生なりに感じたのを覚えています．ですので，大学に入ってからもまず最初に勉強したのは，アインシュタインの論文でしたね．論文集を探して読んだりとか，もちろんだんだん量子力学も勉強してきて，いろんな形で相対論とは違った意味での新しい飛躍や発展があってワクワクしましたね．シュレディンガー方程式や交換関係など，非常に単純だけど美しい式だなという印象もありました．そういったことが積み重なって，今研究しているようなことにつながっていると思います．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2007年7月，東京大学駒場キャンパス研究室にて)

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

ミクロスケールの重力

前田 恵一

これまで見てきたようにアインシュタインの一般相対性理論は様々な強い重力現象を極めて正確に記述している．理論としてはこれほど美しく興味深いものはない．しかしながらそれが確実に正しいとわかっているのは地上を含む太陽系近傍の実験と連星パルサーの観測ぐらいで，近年，量子論が重要となるミクロなスケールやそれとは対極にある宇宙論的巨大スケールで一般相対性理論を超える新しい重力理論構成の試みが行われている．この回ではミクロスケールに焦点を当て，その重力理論に対するアプローチを概観しよう．

17.1 重力場の正準量子化

近年の自然科学における大きな進展は何と言っても20世紀の量子論と相対論であろう．そのうちでも量子論は，古典物理学における決定論的世界観がミクロスケールにおいては適用できないことを示し，自然に対する我々の認識を根本的に変えた．

量子力学の進展は相対論的効果が重要となる領域にまで拡張され，粒子の生成・消滅を取り扱うことのできる場の量子論となった．それはまた，素粒子物理学として発展していった．重力も物理学的観点からは「場」と考えることができるので，当然，その量子論をつくる試みが行われた．実際1930年以降，重力場を量子化しようと非常に多くの試みが行われている[1)]．

その際に考えられる最も簡単な状況は，重力場が非常に弱く線形近似のできる場合である．計量をミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ から少しゆらいでいるとして

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{17.1}$$

とおく．ここで $\kappa^2 = 8\pi G$ は重力定数である．$h_{\mu\nu}$ の1次までの近似でアインシュタイン方程式を考えると，時空のゆらぎを表す重力波の線形方程式が得ら

れる[2]．この線形化された理論は従来の場の量子論の方法で容易に量子化可能で，電磁場を量子化することで光子が現れるように，線形重力場を量子化すると重力子が得られる．問題は相互作用を考えたときに生ずる．重力理論を記述するアインシュタイン・ヒルベルト作用

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4xR[g(x)] \tag{17.2}$$

を $h_{\mu\nu}$ に関して展開すると，線形重力場の作用は 2 次の項で記述され，3 次以上の項がその自己相互作用を表すと考えられる．このような相互作用のある理論を通常の場の量子論の方法で量子化すると，散乱振幅などが発散積分となる．それで朝永らは，量子電磁気学において「くりこみ」という手法を考え出した．この「くりこみ」操作を用いると観測される物理量を有限にすることができる．しかし，重力場の場合，くりこみ不可能な発散が現れるのである．つまり，アインシュタイン理論は（少なくとも弱重力場展開において）くりこみ不可能で，通常の場の量子論が適用できないのである．

ここで少し歴史を振り返ろう[3]．アインシュタインは，1916 年の一般相対性理論の解説の中で「量子論はマックスウェルの電気力学を修正するだけでなく，新しい重力理論（一般相対性理論）も修正しなければならない」と述べている[4]．その後，彼は，量子現象の古典的解釈を探すことに興味をそそられて統一場の理論の研究を行っている．量子力学は不完全なものと信じ，量子力学の定式化を重力場に適用することは他の研究者に任せたのである．

ハイゼンベルグ（W. Heisenberg）とパウリ（W. Pauli）は，相対論的場の量子論を展開した論文の中で「重力場の量子化は，ここで行われた方法で，困難なくできるだろう」と楽観的に言っている[5]．ローゼンフェルト（L. Rosenfeld）は実際にこの定式化を線形重力場に適用し，「重力子」という言葉を導入した[6]．その後，ブロンシュタイン（M.P. Bronsteyn）はこの線形量子重力理論を解析し，批判している[7]．彼は，量子化された重力場の観測可能性の問題点をあげ，不確定性原理に加え，一般相対性理論では，線形化されたアフィン接続成分の測定精度に「絶対的限界」があると主張した．彼は，「場の量子論の定式化を適用することは量子論と重力の望むべき融合をもたらさず，リーマン幾何学の排除・・・そしておそらく，時間や空間の通常概念の否定といった理論の根本的再構成を行い，もっと深淵な全く新しい概念によって理論を構成しなければならない」と主張している[7]．

1930 年代半ばは，量子重力の問題は，すでにある概念や場の量子論の方法を重力場の方程式またはその修正されたものに適用する方法を見つける問題と考えていた「保守派」と，重力は何か特別な性質を持っており，それが一般相対性理論や量子力学における基本的概念の変更を示唆していると考える「急進派」の間に一線が引かれ，混迷を深めていた．

しかし，1950 年代の頃には，ベルグマン（P.G. Bergmann）のグループ[8]，ディラック（P.A.M. Dirac）[9]，そしてアーノウィット（R. Arnowitt），デサー（S. Deser），ミズナー（C.W. Misner）たち[10]の努力で，量子重力問題に対す

る興味がよみがえることになる．彼らは，空間的超曲面の適切な族を選び出し，これらの 3 次元超曲面の時間発展に対し，ハミルトン形式を適用し，正準量子化の方法を調べた．この方法は ADM 形式と呼ばれ，後に数値計算（数値相対論）にも応用され，時空のダイナミクスを議論する基準となっている[13]．

少しおさらいをしよう．時空を時間一定の 3 次元超曲面族で張る．時刻 t における超曲面 $\Sigma[t]$ の計量を γ_{ij} とすると，計量は一般に

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{17.3}$$

のように分解される．ここで N, N^i はそれぞれラプス関数，シフトベクトルで，座標系をどのように取るかというゲージ自由度を表している．このとき，アインシュタイン・ヒルベルト重力作用 (17.2) は

$$S_{EH} = \int d^4x \left[\dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i\right] \tag{17.4}$$

と表される．ここで π^{ij} は γ_{ij} の共役運動量を表す[傍注1]．また $\mathcal{H}$ および $\mathcal{H}^i$ はアインシュタイン方程式の拘束条件に関係する項で，

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa^2}\overset{(3)}{R}, \quad \mathcal{H}^i = -2D_j\pi^{ij} \tag{17.5}$$

で与えられる．ここで，$\overset{(3)}{R}$ は γ_{ij} からつくられるスカラー曲率である．この作用の変分から $\mathcal{H} = 0, \mathcal{H}^i = 0$ が得られるが，これは拘束条件そのものである[傍注2]．このような条件が現れる理由は，形式的には系のラグランジアンに N および N^i の時間微分を含まないからであるが，物理学的にはそれらがゲージ自由度に対応しており，ダイナミカルな物理量を表していないことによる．

［傍注1］第 13 回[13]では運動量 π^{ij} の代わりに等価な外部曲率 K^{ij} を用いている．2 つの変数の関係は，

$$\pi^{ij} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa^2}(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$$

で与えられる．

［傍注2］簡単のため物質場はないとする．

このように重力場を量子化するためには，ディラックが考えたような拘束条件付きの量子化を行わなければならない．今の場合，量子状態を記述する波動関数を Ψ とすると

$$\mathcal{H}\Psi = 0, \quad \mathcal{H}^i\Psi = 0 \tag{17.6}$$

を満たす状態が物理的に許されることになる．また，系のハミルトニアン H は $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}^i$ の線形結合で表されるため，シュレディンガー方程式は $H\Psi = 0$ となり，波動関数 Ψ は時間を含まない “定常” 状態を記述することになる．このとき，非自明な拘束条件 $\mathcal{H}\Psi = 0$ を特にホイラー・ドウィット（Wheeler・DeWitt）方程式と呼ぶ．

このホイラー・ドウィット方程式を用いて，1980 年代には量子宇宙論が大いに議論された．ハートル（J. Hartle）やホーキング（S.W. Hawking）の無境界境界条件を用いた「宇宙誕生シナリオ」[11]やビレンキン（A. Vilenkin）による「無からの宇宙創生」[12]が真しやかに語られた．宇宙論に限定しそのような議論が展開された背景には，もちろん宇宙の始まりを知りたいという人類の欲求があるからではあるが，一様・等方時空に限定することで，状態空間を有限自由度にし，計算可能なより簡単な系でまず議論しようという意図があった．こ

れらの話は非常に面白いが，量子重力理論が完成していない段階で，どの程度もっともらしいかわからないのが現状である．

一方，ファインマン（R.P. Feynman）は，量子電磁気学の成功後，特殊相対論的場の量子論の摂動テクニック（経路積分法）を一般相対性理論の場の方程式に適用した[14)]．この方法では，重力場（計量）を背景ミンコフスキー計量との差と考え，特殊相対論的場として扱う．この場はアインシュタイン方程式と等価な非線形場の方程式に従うが，ローレンツ不変な理論である．その結果，アインシュタイン理論を特徴づける幾何学と重力の間の深い結びつきがこのアプローチでは失われる．量子重力に関する多くの研究が，このようなアプローチに沿ってなされた．しかし，アインシュタインの場の方程式は摂動的にはくりこみ可能でないということが判明した．そこで，正準形式を基盤にした量子重力理論を考えるには，非摂動論的手法を開発しなければならなくなった．

そのような問題に正面から取り組んでいるのが，アシュテカ（A. Ashtekar）のグループである．初めは，一般相対性理論をアシュテカ変数（接続係数と運動量の複素数的組合せ）を使って書き換え，重力場の量子化を試みていた[15)]が，最近では，より新しい変数（上記 2 つの実数的組合せ）を用いた「ループ重力理論」を展開している[16)]．この方法では，従来の拘束条件に加えて，ゲージ拘束条件が新たに出てくる．それを解くために接続係数に関連したホロノミー変数を導入するが，その際ループに沿った積分が現れる．そのループを用いて系の量子状態を記述する．また，このとき，波動関数がループの連続変形に対して不変であれば運動量拘束条件は満たされる．もっとも，他のアプローチ同様，ハミルトニアン拘束条件はそう簡単には解けず，そのまま状態を拘束する条件として残される．一方，ループ表現に現れる曖昧さを解決するため，「スピンネットワーク」による状態の記述が現在の理論の基礎となっている．

このループ重力理論には未知のパラメータ [イミルジ（Immirzi）パラメータ] を含むが，ブラックホールのエントロピーなど，強重力場における量子重力効果が計算可能であるということで，非常に注目された[17)]．この未知パラメータは，大きなブラックホールの極限でブラックホールエントロピー S が地平線の表面積 A の 1/4 となる（ベケンシュタイン・ホーキングのエントロピー公式 $S = A/(4G)$ を満たす）ように決める．またその理論は宇宙初期の特異点回避の問題にも応用され，ループ量子宇宙論として研究が始まっている[18)]．

但し，この理論はまだ発展途上であり，多くの重要な未解決問題がある．その中でも重要な問題の一つは，古典極限で一般相対性理論に一致するかどうかがまだわからないという点である．また，量子宇宙論同様に，時間にあたる変数を持たないので，時空のダイナミクスをどう記述するかは大きな問題である．

17.2 統一理論としての重力と量子化

前回[19)]，関連した話をしたので，ここでは簡単に触れる．

重力を量子化する試みで現在の主流は，素粒子統一理論に基づくアプローチ

である．重力を特別視するのではなく，多くの基礎的な力の一つとして捉え，他の場と一緒に量子化を行おうというものである．その最有力候補は超紐理論である[20]．それによると，重力子を含むすべての素粒子は，「紐」と呼ばれる 2 次元的実体の量子励起状態で表される．その結果，紐を量子化すれば，重力も量子化できるというわけである．

ただし，実際の量子化は，ミンコフスキー時空を伝播する紐の量子化に留まり，実際に興味ある重力の強い時空を扱う方法はまだよくわかっていない．その結果，宇宙初期の特異点問題やブラックホール蒸発の運命に対してはっきりとした答えを与えるに至っていない．

そのような状況で，重力場の量子化と直接関係ないと思われるが，興味深い仮説が議論されている．AdS/CFT 対応と呼ばれるものである[21]．AdS は反ドジッター (anti de Sitter) 時空，CFT は共形場の理論 (conformal field theory) の略である．AdS/CFT 対応とは，大ざっぱに言って，「AdS_5 を背景とする 5 次元重力理論」と「D_3 ブレイン上の 4 次元共形場の理論」が等価であるという仮説である．つまり，5 次元古典重力理論を解析することによって 4 次元の場の量子論のことがわかるという大胆な考えである．逆に 4 次元のゲージ理論の解析からそれに対応する境界を持つ 5 次元時空が決定されることになる．この仮説やさらに拡張した考えを使って，現在，興味深い研究がいろいろ行われている．例えば，量子色力学の強結合領域の解析を 5 次元重力の研究として行ったり，ブラックホールエントロピーの起源に関連させて場の量子論の解析が行われたりしている．この対応は，もし本当であれば，量子論誕生のときの「ボーアの対応原理」にあたるようなものかもしれず，新しい物理学の出現を予兆させる．

17.3 時空は量子化すべきか

一般相対性理論は，重力を幾何学の対象として扱い，時空のゆがみによって重力場を記述している．その対応は非常によい精度で実験や観測と合っている．またそのような理解は物理学と幾何学を融合させるものとして非常に美しい理論になっている．その一方で，重力場のそのような捉え方は他の物質場と重力場の間に大きな差異を生み出している．一般相対性理論においては局所的なエネルギーの定義が困難であるし，重力場はゲージ場とは微妙に異なるので大統一理論による力の統一の枠からはみ出している．重力場がくりこみ不可能というのもそのような違いが関係しているように思われる．重力と時空の同一視により重力場の量子化は時空の量子化と等価となり，問題をより難しくしている．つまり，時空の量子化は時間と空間の離散化を意味するため，その取り扱いは極めて難しくなるのである．

しかし，どのようなスケールで重力の量子化が必要になるのであろうか？今理論に含まれる自然定数は，光速度 c，プランク定数 $\hbar$，そしてニュートン重力定数 G である．それらからつくられる長さのスケール（プランク長）$(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33}$ cm 程度まで小さくなると重力場の量子化，つま

り時空の量子化が必要だとされている[傍注3]．このスケールは通常の物質（電子や電磁場など）の量子効果が重要となるスケールに比べると何十桁も小さい．

そこで，1970年代には，難しい重力場の量子化を行わないで，古典的時空中で，非重力的な場の量子化についての研究が，パーカー（L. Parker）[22]によって始められた[傍注4]．この重力を古典的に扱い，物質場を量子化する方法は半古典重力理論と呼ばれる．彼は主に膨張宇宙における粒子生成の問題を考えたが，その半古典的アプローチの最大の成功は，ホーキングによるブラックホール蒸発の予言である[24,25]．

そのような研究は非常に興味深い．しかしながら，通常の物質の量子論的スケール（例えば電子のコンプトン波長は $\hbar/(m_e c) \approx 3.862 \times 10^{-11}\,\mathrm{cm}$）に比べて20桁以上も小さいスケールまで一般相対性理論は本当に正しいのであろうか？ 本当に重力と時空の対応関係はすべてのスケールで成り立つのであろうか？ 人類がこれまで考えてきた法則にはすべて限界がある．一般相対性理論もプランク長では量子重力効果が効くようになるので，変更を受けると言われているが，本当にそのようなスケールまで何十桁にわたって成り立つ法則なのであろうか？ 一般相対性理論があまりに美しいので，その点に疑問を持つ研究者はあまり多くないように思われる．しかし，「ミクロなスケールでは全く異なる重力理論が存在し，アインシュタイン方程式は単にその基礎理論の巨視的なスケールでの有効理論ではないか．曲がった時空による重力の記述（一般相対性理論）は巨視的なスケールでのみ正しいのではないか」と考える研究者たちもいる．そのような考え方の中で面白いアイデアを紹介しよう[26]．まず，原子・分子の法則と流体力学の関係を考えてみよう．ミクロな世界の原子・分子はシュレディンガー方程式で記述される．それらが非常にたくさん集まった巨視的物質は連続体として振る舞う．流体としての近似がよい場合にはその運動はナビエ・ストークス方程式で記述される．シュレディンガー方程式もナビエ・ストークス方程式も共にそれぞれの領域で現象を非常によく記述している．しかし，ナビエ・ストークス方程式をいくら詳しく解析しても原子・分子の世界は見えてこない．ナビエ・ストークス方程式を量子化しても，ミクロな世界の法則は出てこない．せいぜい流体の振動モードの量子化からフォノンが現れるぐらいだろう．それはナビエ・ストークス方程式が多粒子系において成り立つ有効理論であるからだ．

これと同じことが重力にも当てはまるかもしれないというのである．ここでは，アインシュタイン方程式は「ナビエ・ストークス方程式」にあたり，ミクロの世界では我々がまだよく知らないもっと基礎的な重力理論が存在すると考える．ミクロスケールでは重力は必ずしも時空とは関係しない．しかしその基礎理論を基に巨視的なスケールでの重力現象を考えるとリーマン幾何学で重力を記述する一般相対性理論がその有効理論として導かれるのではという予想である．曲がった時空が重力を表すのはプランク長よりもっともっと大きなスケールからであって，それより小さなスケールでは時空による重力現象の記述はもはや正しくないと考えるのである．アインシュタイン方程式はあくまで巨視的な「ナビエ・ストークス方程式」であり，ミクロな世界の「原子・分子の法則」を

[傍注3] プランク時間，プランク質量，プランク密度はそれぞれ，$(\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.391 \times 10^{-44}$ 秒，$(\hbar c/G)^{1/2} = 2.177 \times 10^{-5}$ g，$c^5/\hbar G^2 = 5.157 \times 10^{93}$ g/cm^3 である．

[傍注4] シュレディンガー（E. Schrödinger）[23]が実はその先駆けであった．

記述していない．そうだとすると，アインシュタイン方程式を量子化すること，また時空を量子化することも全く意味がなくなる．量子化を実行しても「フォノン」が得られるのみで，本当に知りたい「原子・分子の量子状態」についてはわからないというわけだ．

もちろん，そのような考え方は極端で，正しいとすると，重力場の量子化をどう探って行けばいいのかわからなくなる．フー（B.L. Hu）は，トップダウン的アプローチの超紐理論に対抗し，ボトムアップ的手法としての「確率論的重力理論」を提案している[27]．重力場の量子化をせずに，物質場の量子化に伴うゆらぎが古典的重力場の揺動としてどのように現れるかを研究することで，重力の量子論的側面の一端を垣間見ることができるのではと言っている．しかし，話はそんなに簡単ではないだろう．

古くから知られている重力の理解が未だに完全なものでなく，その研究がまた新しい科学法則の発見につながるかもしれないのは非常に興味深い．次回は，宇宙論的スケールにおける重力理論の未知の部分に迫る．

参考文献

1) A. Ashtekar and R. Geroch, *Rep. Prog. Phys.* **37** (1974) 1211.
2) 前田恵一「重力理論入門」第 7 回，数理科学（2006 年 11 月号）．
3) J. Stachel, “相対性理論の歴史”『20 世紀の物理学』第 4 章（前田恵一訳）(丸善，1999)，p.296.
4) A. Einstein, *Ann. Phys. , Lpz.* **49** (1916) 769.
5) W. Heisenberg and W. Pauli, *Zeit. Physik*, **56** (1929) 1.
6) L. Rosenfeld, *Ann. Phys., Lpz.* **5** (1930) 113.
7) M.P. Bronsteyn, *Phys. Z. Sowjetunion* **9** (1936) 140; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **6** (1936) 140.
8) P.G. Bergmann *et al.*, *Phys. Rev.* **80** (1950) 81.
9) P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc.* **A 246** (1958) 333.
10) R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner,「The dynamics of general relativity」in *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, 1962) p.227.
11) J. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 2960.
12) A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D 30** (1984) 509.
13) 前田恵一「重力理論入門」第 13 回，数理科学（2007 年 8 月号）．
14) R.P. Feynman, *Acta Phys. Polon.* **24** (1963) 697.
15) A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244; *Phys. Rev.* **D 36** (1987) 1587.
16) C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge Univ., 2004).
17) C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996).
18) M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5227; *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) *L109*; **19** (2002) 2717.
19) 前田恵一「重力理論入門」第 16 回，数理科学（2007 年 12 月号）．
20) J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge Univ. 1998).
21) O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rep.* **323** (200) 183.
22) L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968); *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1969).
23) E. Schrödinger, *Physica* **6** (1939) 899.
24) S.W. Hawking, *Nature*, **248**, 30 (1974); *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
25) 前田恵一「重力理論入門」第 14 回，数理科学（2007 年 9 月号）．
26) B.L. Hu, *Int. J. Theor. Phys.* **44** (2005) 1785.
27) B.L. Hu and E. Verdaguer, *Living Rev. Relativity* **7** (2004) 3.

（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

ゲーム理論講義

第14回

交渉集合とカーネル

船木 由喜彦

今回は，前回に紹介した仁を常に含む提携形ゲームの解としてカーネルと交渉集合を紹介する．とくに，交渉集合はコアを含み，常に存在する解であり，最近では経済学への応用も多い．さらに，破産問題のタルムードによる解がカーネル，仁と一致することを示す．

14.1 交渉集合

初めに交渉集合の定義から始めよう．その定義のために，配分 $x \in I(v)$ に対する異議と逆異議を定義しよう．

定義：異議と逆異議 $x \in I(v)$ とする．プレイヤー k のプレイヤー l $(k \neq l)$ に対する x における**異議**とは，次の3条件を満たす利得ベクトルと提携の組 (y, P) $(y \in \mathcal{R}^{|P|},\ P \ni k,\ P \not\ni l)$ である．

(1) $y_k > x_k$, **(2)** すべての $i \in P$ に対し $y_i \geq x_i$, **(3)** $\displaystyle\sum_{i \in P} y_i \leq v(P)$.

上記の性質を満たす x と (y, P) をとる．このとき，(y, P) に対する**逆異議**は次の3条件を満たす利得ベクトルと提携の組 (z, Q) $(z \in \mathcal{R}^{|Q|},\ Q \ni l,\ Q \not\ni k)$ である．

(1) すべての $i \in Q$ に対し $z_i \geq x_i$,

(2) すべての $i \in P \cap Q$ に対し $z_i \geq y_i$,

(3) $\displaystyle\sum_{i \in Q} z_i \leq v(Q)$.

現在，討議の対象となっている分配の提案 x に対し，あるプレイヤー k の提出する反対提案が異議 (y, P) である．これは P に含まれない l に対する譲歩の要求と考えられる．このとき，この提案により自分を含む提携 P のメンバーは全員，元の分配以上の利得を得て，さらに $\sum_{i \in P} y_i \leq v(P)$ であるから，提

携 P だけで実現可能な利得ベクトルである．

しかしながら，異議を提出されたプレイヤー l は，それに対する反対提案が提出できるかもしれない．それが異議 (y,P) に対する逆異議 (z,Q) である．この Q のメンバーで実現可能な利得ベクトル z により，自分を含み k を含まない提携 Q のメンバー全員に元の配分 x 以上の利得を与え，さらに，k の提案している意義に属する提携 $P\cap Q$ のメンバーには，異議の配分 y 以上の提案を与えており，しかも，$\sum_{i\in Q} y_i \leq v(Q)$ であるから，Q だけで実現可能な分配である．したがって，k の異議に対抗できる提案であると考えられる．したがって，異議が説得性を持つためにはこのような逆異議が存在しないことが重要である．このとき，そのような説得性のある異議が存在しない場合，元の配分 x は，安定であると考えられ，交渉の妥結点の一つと考えられる．そのような配分の集合が**交渉集合**である．

定義：交渉集合 $\mathcal{M}(v)$

$\mathcal{M}(v)=\{x\in I(v)|$ すべての k の $l(k\neq l)$ に対する x における異議 (y,P) に対し，逆異議 (z,Q) が存在する．$\}$

交渉集合は次の有用な性質を持っている．

定理 14.1　優加法性を満たすゲームにおいて，交渉集合はコアを含む．

証明　x をコアに属する配分とする．ここで, k が l $(k\neq l)$ に対して異議 (y,P) を持つとすると，$y_k > x_k$, すべての $i\in P$ に対して $y_i \geq x_i$ $\sum_{j\in P} y_j \leq v(P)$ が成り立つ．よって，$y_k - x_k = \delta > 0$ とし，$i\in P$ に対し $z_i = x_i + \frac{\delta}{|P|}$, $i\notin P$ に対し，$z_i = \frac{v(N)-\sum_{j\in P} y_j - \sum_{j\notin P} v(\{j\})}{|N\backslash P|} + v(\{i\})$ として，z を定義すると，優加法性から $v(N)-\sum_{j\in P} y_j - \sum_{j\notin P} v(\{j\}) \geq 0$ が成り立つので，z は配分となり，$\sum_{j\in P} z_j \leq v(P), z_i > x_i, \forall i\in P$ より z は P を通して x を支配する．これは $x\in C(v)$ に矛盾する．よって，x には異議が存在しないので交渉集合に属する．（証明終）

14.2 カーネルと準カーネル

交渉集合は，提案に対する k から l への異議とその逆異議という形の交渉で定義された．これを前回に定義した**不満** $e(S,x)=v(S)-\sum_{k\in S} x_k$ を基にした交渉として考えてみよう．

任意のペア i,j $(i\neq j)$ に対し，プレイヤー i の j に対する**最大不満**を $s_{ij}(x)=\max_{S\ni i, S\not\ni j} e(S,x)$ で定義する．このとき，i の j に対する最大不満を i から j への要求，j の i に対する最大不満を j から i への要求と考え，さらに，それらが均衡することで交渉が妥結すると考えたとき，そのような妥結がすべてのペア i,j に対して成り立つ準配分の集合を**準カーネル**と呼ぶ．準カーネルが配分となるように，たとえ i の j に対する最大不満が j の i に対する不満より小さいとしても，$v(\{i\})=x_i$ を満たす場合，i はこれ以上の譲歩ができないので，それも最大不満の均衡として許容したときの交渉が妥結する配分

の集合を**カーネル**と呼ぶ．これらは数式では次のように定義される．

定義：準カーネル $\mathcal{K}^*(v)$，カーネル $\mathcal{K}(v)$

$$\mathcal{K}^*(v) = \{x \in I^*(v) | \text{ すべての } i, j (i \neq j) \text{ に対して，} s_{ij}(x) = s_{ji}(x)\},$$

$$\mathcal{K}(v) = \{x \in I(v) | \text{ すべての } i, j (i \neq j) \text{ に対して，}$$
$$(s_{ij}(x) - s_{ji}(x))(v(\{i\}) - x_i) \leq 0\}.$$

準カーネルが配分集合に含まれるときはカーネルに一致する．また，優加法性を満たすゲームでは準カーネルとカーネルは一致する．これらについては文献 1) を参照していただきたい．

前回，紹介した 3 人ゲームの例

$$v(ABC)=30,\ v(AB)=0,\ v(AC)=10,\ v(BC)=20,\ v(A)=v(B)=v(C)=0$$

において，カーネルを求めてみよう．初めに，準カーネルを求める．$x_A, x_B, x_C \geq 0$，かつ $x_A + x_B + x_C = 30$ より，

$s_{AC}(x) = \max\{v(A) - x_A, v(AB) - x_A - x_B\} = \max\{0, 0 - x_B\} - x_A = -x_A,$

$s_{CA}(x) = \max\{v(C) - x_C, v(BC) - x_B - x_C\} = \max\{0, 20 - x_B\} - x_C$

であるから，$s_{AC}(x) = s_{CA}(x)$ より $-x_A = \max\{0, 20 - x_B\} - x_C$ を得る．さらに同様にして，$s_{BC}(x) = s_{CB}(x)$ より，$-x_B = \max\{0, 10 - x_A\} - x_C$ を得る．

$x_A \leq 10$ のとき，等式 $-x_B = \max\{0, 10 - x_A\} - x_C$ から $-x_B = 10 - x_A - x_C$ より $x_A = 5$ を得る．また，$x_B \leq 20$ のとき，等式 $-x_A = \max\{0, 20 - x_B\} - x_C$ から $-x_A = 20 - x_B - x_C$ より $x_B = 10$ を得る．このとき，$x_C = 15$ は解となる．逆に $x_A \leq 10$, $x_B > 20$ のケースでは上記の議論から解を持たない．また，$x_A > 10$, $x_B \leq 20$ も同様に解を持たない．$x_A > 10, x_B > 20$ の場合は $x_C \geq 0, x_A + x_B + x_C = 30$ に矛盾するので解を持たない．したがって，$(x_A, x_B, x_C) = (5, 10, 15)$ は唯一の解となる．この解は配分となり $s_{AB} = s_{BA}$ も満たすので，準カーネルかつカーネルとなる．これは，仁と一致している．

定理 14.2　交渉集合 $\mathcal{M}(v)$ はカーネル $\mathcal{K}(v)$ を含む．

証明　$x \in \mathcal{K}(v)$ とし，交渉集合に属していないとする．そのとき，逆異議の存在しない k の l に対する x における異議を (y, P) とする．このとき，$x_l > v(l)$ である．なぜなら，$z_l = v(l)$ とすると，$(v(l), \{l\})$ が l の k に対する逆異議になるからである．

したがって，カーネルの定義から $s_{lk}(x) \geq s_{kl}(x)$ が成り立つ．よって $T \ni l, T \not\ni k$ に対して $s_{lk}(x) = v(T) - \sum_{j \in T} x_j$ が成り立つとすると，

$$v(T) - \sum_{j \in T} x_j = s_{lk}(x) \geq v(P) - \sum_{j \in P} x_j \geq \sum_{j \in P} y_j - \sum_{j \in P} x_j$$

が成り立つ．よって，

$$v(T) \geq \sum_{j \in T} x_j - \sum_{j \in P} x_j + \sum_{j \in P} y_j$$

$$= \sum_{j\in T\setminus P} x_j - \sum_{j\in P\setminus T} x_j + \sum_{j\in T\cap P} y_j + \sum_{j\in P\setminus T} y_j > \sum_{j\in T\setminus P} x_j + \sum_{j\in T\cap P} y_j$$

を得る．ここで，$z \in \mathcal{R}^{|T|}$ を $j \in T \setminus P$ のとき $z_j = x_j$, $j \in T \cap P$ のとき $z_j = y_j$ とすれば，(z, T) は (y, S) に対する l の逆異議となり矛盾である．

（証明終）

さらに，カーネルは仁を含み，準カーネルは準仁を含むが証明は省略する．証明については文献 1〜3) などを参照していただきたい．3 人ゲームではカーネルは 1 点になるので仁と一致する．

14.3 カーネルの整合性

準カーネルは，前回の破産問題において紹介した全体と部分の整合性公理によって特徴づけられる．提携形ゲームの解における整合性公理を定義しよう．なお，この節と次の節では，プレイヤー集合を区別するために $I(v), \varphi(v)$ の代わりに $I(N,v), \varphi(N,v)$ のように記述する．ゲーム (N,v) と，ある配分 $x \in I(N,v)$，縮小されたプレイヤー集合 $S \subset N$ に対し，縮小ゲーム (S, v^x) を考える．特性関数は

$$v^x(S) = v(N) - \sum_{j\in N\setminus S} x_j, \quad v^x(\emptyset) = 0,$$

$$v^x(T) = \max\left\{ v(T\cup Q) - \sum_{j\in Q} x_j \,\middle|\, Q \subseteq N \setminus S \right\} \quad \text{for } T \subset S,\ T \neq \emptyset$$

で与えられる．この縮小ゲームの各提携 $T \subset S$ に対する提携値 $v^x(T)$ は次のように解釈できる．縮小ゲーム (S, v^x) において，各提携 T は，外部のプレイヤーの提携 $Q \subseteq N \setminus S$ から，各 $j \in Q$ はそれぞれ利得 x_j を受け取るという条件を前提として，協力を得られると考えられている．このような Q の中で，$v(T\cup Q) - \sum_{j\in Q} x_j$ を最大にするものが縮小ゲームにおける T の提携値となる．

準カーネルを特徴づけるために次の 2 つの整合性公理を紹介しよう．$\varphi(N,v)$ を提携形ゲームの解とする．

整合性公理　$x \in \varphi(N,v)$ ならば，すべての非空な $S \subset N$ に対し $x_S \in \varphi(S, v^x)$[傍注1]．

［傍注 1］　$x = (x_i)_{i\in N} \in \mathcal{R}^N$, $S \subset N$ に対し，$x_S = (x_i)_{i\in S}$ とする．

逆整合性公理　$x \in \mathcal{I}^*(N,v)$ のとき，任意の $i, j \in N (i \neq j)$ に対し $x_{\{i,j\}} \in \varphi(\{i,j\}, v^x)$ ならば，$x \in \varphi(N,v)$.

定理 14.3　準カーネル $\mathcal{K}^*(N,v)$ は整合性公理と逆整合性公理を満たす．

証明[傍注2]　$T \subset S, i, j \in N (i \neq j)$ とし，縮小ゲーム (S, v^x) を考える．このとき，このゲームにおいて，$x \in \mathcal{I}^*(N,v)$ に対し，

［傍注 2］　この証明では，対象となるゲームに応じて最大不満を区別しなければならないので $s_{ij}(x)$ の代わりに，対象となるゲーム v を明示して $s^v_{ij}(x)$ のように表記する．

$$s^{v^x}_{ij}(x_S) = \max\left\{ v^x(T) - \sum_{k\in T} x_k \,\middle|\, T \subset S, i \in T,\ j \notin T \right\}$$

$$= \max\left\{ \max\left\{ v(T\cup Q) - \sum_{k\in Q} x_k \,\middle|\, Q \subseteq N\setminus S \right\} - \sum_{k\in T} x_k \,\middle|\, T \subset S, i \in T, j \notin T \right\}$$

$$= \max\left\{\max\left\{v(T\cup Q)-\sum_{k\in T\cup Q}x_k\middle|Q\subseteq N\setminus S\right\}\middle|T\subset S, i\in T,\ j\notin T\right\}$$

$$= \max\left\{v(P)-\sum_{k\in P}x_k\middle|P\subset N, i\in P,\ j\notin P\right\} = s_{ij}^v(x)$$

が成り立つ．ゆえに，$x\in\mathcal{K}^*(N,v)$ ならば，任意の $i,j\in S, (i\neq j)$ に対し，

$$s_{ij}^{v^x}(x_S) = s_{ij}^v(x) = s_{ji}^v(x) = s_{ji}^{v^x}(x_S)$$

が成り立つ．よって，$x_S\in\mathcal{K}^*(S,v^x)$ である．

続いて，$x\in\mathcal{I}^*(N,v)$ において，すべての $i,j\in N$, $(i\neq j)$ に対し $x_{\{i,j\}}\in\mathcal{K}^*(\{i,j\},v^x)$ とする．このとき，$s_{ij}^{v^x}(x_{\{i,j\}}) = s_{ji}^{v^x}(x_{\{i,j\}})$ が成り立つから，上の議論より，

$$s_{ij}^v(x) = s_{ij}^{v^x}(x_{\{i,j\}}) = s_{ji}^{v^x}(x_{\{i,j\}}) = s_{ji}^v(x)$$

が成り立つ．すなわち，$x\in\mathcal{K}^*(N,v)$ である．（証明終）

提携形 2 人ゲーム $(\{i,j\},v)$ の**標準解** $\bar{x}=\bar{x}(\{i,j\},v)$ は

$$\bar{x}_i = \frac{v(ij)+v(i)-v(j)}{2},\quad \bar{x}_j = \frac{v(ij)+v(j)-v(i)}{2}$$

で定義される．2 人ゲームの準カーネルは標準解に一致する．さらに，一般のゲームの準カーネル整合性公理によって次のように特徴づけられる．証明は文献 1) などを参照していただきたい．

定理 14.4 準カーネルは 2 人ゲームにおいて標準解に一致し，整合性公理，逆整合性公理を満たす唯一の解である．

14.4 破産ゲームのカーネルと仁

この節では前回に紹介した破産問題の CG 整合解が破産ゲームのカーネルと一致することを示そう．破産問題 (N,E,d) に対応する破産ゲームを $(N,v_{E,d})$，$v_{E,d}(S) = \max\{0, E-\sum_{k\in N\setminus S}d_k\}$ とし，破産問題に対応する CG 整合解を $x=f^{CG}(N,E,d)$ とする．さらに，破産ゲーム $(N,v_{E,d})$ の解 φ を $x=\varphi(N,v_{E,d}) = f^{CG}(N,E,d)$ で定義する．このとき，$(N,v_{E,d}) = (N,v_{E',d'})$ ならば，$E=E'$ となり，$d_i,d_i'\leq E$ ならば $d_i=d_i'$ であり，$d_i,d_i'>E$ ならば CG 整合解は $d_i=d_i'=E$ のときの解と変わらないので $f^{CG}(N,E,d)=f^{CG}(N,E',d')$ が成り立つ．したがって，破産問題の CG 整合解から，破産ゲームの解 φ を矛盾なく定義することができる．

このとき，$T=\{i,j\}$ とするとき，2 人破産問題に対応する CG 整合解は，定義から $x_T=f^{CG}(T,E,d)=f^M(T,E,d)$，すなわち，ミシュナの解である．さらに，$x_T=\varphi(T,v_{E,d})=\bar{x}(T,v_{E,d})$ となり，この解は 2 人破産ゲームの標準解と一致している．（読者自ら確かめていただきたい．）

次に破産問題 (N,E,d) とその CG 整合解 x，破産ゲーム $(N,v_{E,d})$ と，それらから生成される 2 つの 2 人破産ゲーム $(T,v_{x_i+x_j,d_T})$，$(T,(v_{E,d})^x)$ $(T=\{i,j\})$

に対して $v_{x_i+x_j,d_T} = (v_{E,d})^x$ が成り立つことを示さなければならない．$v_{E,d} = v$ と書くことにする．まず，$v^x(T) = v(N)-x(N\backslash T) = x_i+x_j = v_{x_i+x_j,d_T}(T)$ である．さらに，

$$v^x(i) = \max_{Q\subseteq N\backslash T}\left\{v(\{i\}\cup Q) - \sum_{k\in Q} x_k\right\} = v(\{i\}\cup R) - \sum_{k\in R} x_k$$

が成り立っているとする．このとき，$d_k \geq x_k$, $\forall k \in N$ を用いて

$$v^x(i) = v(\{i\}\cup R) - \sum_{k\in R} x_k = \max\left\{0, E - \sum_{k\in N\backslash(R\cup\{i\})} d_k\right\} - \sum_{k\in R} x_k$$

$$\leq \max\left\{0, \sum_{k\in N} x_k - \sum_{k\in N\backslash(R\cup\{i\})} d_k - \sum_{k\in R} x_k\right\}$$

$$= \max\left\{0, \sum_{k\in T} x_k - d_j - \sum_{k\in N\backslash(R\cup T)} (d_k - x_k)\right\} \leq \max\left\{0, x_i + x_j - d_j\right\}$$

が成り立つ．さらに，$Q = N\setminus T$ とすることで，

$$\begin{aligned} v^x(i) &\geq v(\{i\}\cup(N\setminus T)) - \sum_{k\in N\backslash T} x_k \\ &= \max\left\{0, E - \sum_{k\in N\backslash((N\backslash T)\cup\{i\})} d_k\right\} - \left(\sum_{k\in N} x_k - \sum_{k\in T} x_k\right) \\ &\geq (E - d_j) - \left(E - \sum_{k\in T} x_k\right) = x_i + x_j - d_j, \end{aligned}$$

を得る．$Q = \emptyset$ とすることで，$v^x(i) \geq v(i) \geq 0$ を得る．以上から $v^x(i) = \max\{0, x_i+x_j-d_j\} = v_{x_i+x_j,d_T}(i)$ が成り立つ．同様に $v^x(j) = \max\{0, x_i + x_j - d_i\} = v_{x_i+x_j,d_T}(j)$ を得る．すなわち，$v_{x_i+x_j,d_T} = (v_{E,d})^x$ が成り立つ．

これまでの議論を用いて破産問題の CG 整合解が破産ゲームのカーネルに一致することを示すことができる．

$x = \varphi(N, v_{E,d}) = f^{CG}(N,E,d)$ より，すべての 2 人提携 $T \subset N$ に対し $x_T = f^M(T, x_i + x_j, d_T) = \bar{x}(T, v_{x_i+x_j,d_T}) = \bar{x}(T,(v_{E,d})^x) = \mathcal{K}^*(T,(v_{E,d})^x)$ が成り立つ．$\mathcal{K}^*$ は逆整合性を満たすので，$x = \mathcal{K}^*(v_{E,d})$ が成り立つ．すなわち，破産問題の CG 整合解は破産ゲームの準カーネルである．破産ゲームは凸ゲームであるので準カーネルとカーネル，仁が一致するので，破産ゲームの仁は破産問題の CG 整合解に一致する．このようにして，破産問題のタルムードによる解が協力ゲームの解によって説明されることが証明された．

参考文献

1) Peleg, B. and P. Sudholter, *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
2) Owen, G. *Game Theory, 3rd editions*, Academic Press, 1995.
3) 鈴木光男『新ゲーム理論』，勁草書房，1993.

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

ネットワークの可視化技術

大規模情報からの意味情報の抽出

斉藤 和巳

1. はじめに

“一目瞭然”や，“百聞は一見にしかず”と言われるように，複雑な対象を理解しようとするとき，本質的な構造を適切に可視化して鳥瞰できれば大変便利である．複雑なネットワークの構造を直感的に理解しようとするときも，このような可視化は重要な役割を果たすと自然に思われる．

今回，複雑ネットワークの多様な可視化技術[1)]の中で頻繁に使われる，スペクトラル法，多次元尺度法，バネモデル法，およびクロスエントロピー法を取り上げる．各手法の基本アイデアと可視化アルゴリズムについて説明し，規模の異なる3種のネットワークでの可視化結果を示すことで，そこから分かる各手法の特性に関して述べる．最後に，可視化研究の今後の課題について簡単に触れる．

2. 可視化手法

与えられたネットワーク（グラフ）の全ノード（頂点）集合を $V=\{v_1,\cdots,v_N\}$ とし，その隣接行列を $\boldsymbol{A}$ とする．すなわち，隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の第 (i,j) 成分 $a_{i,j}$ は，ノード v_i と v_j 間にリンク（辺）があれば1に，なければ0に設定する．今回は基本ケースとして，自己リンクも重みなしの単純無向ネットワークのみを対象とする．つまり，$a_{i,i}=0$, $a_{i,j}\in\{0,1\}$ かつ $a_{i,j}=a_{j,i}$ である．

本稿では主として，基本アイデアの明確化と記述の簡略化のため，ノード集合 $V=\{v_1,\cdots,v_N\}$ を，それぞれ対応する1次元の座標点 $\{x_1,\cdots,x_N\}$ として可視化する問題を扱う．なお，一般の k 次元空間の座標点としての可視化へ拡張することは，以下で簡単に触れるように，どの手法でも容易に行える．また便宜上，N 個の座標点は N 次元のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_N)^T$ と同一視する．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

2.1 スペクトラル法

概念的にシンプルなスペクトラル法は，$\|\boldsymbol{x}\|^2=1$ の制約の下で，次式を最小化する座標ベクトルを求める可視化法である．

$$\mathcal{S}_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{i,j}(x_i-x_j)^2. \qquad (1)$$

ただし，自明な解 $\boldsymbol{x}_0\propto\boldsymbol{1}=(1,1,\cdots,1)^T$ は除外する．直感的には，隣接するノード対（$a_{i,j}=1$）の座標は近くするように可視化する目的関数である．今，ノード v_i が持つリンク数 γ_i（次数）を，$\gamma_1,\cdots,\gamma_N$ の順に対角要素として並べて構成した

対角行列 $\boldsymbol{\Gamma}$ を定義すれば，式 (1) は以下のように変形できる．

$$\mathcal{S}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

自明な解 $\boldsymbol{x}_0 \propto \mathbf{1}$ は，行列 $(\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{A})$ における固有値 $\lambda_0 = 0$ の固有ベクトルに他ならない．よって，次に小さな固有値 $\lambda_1 \leq \lambda_j$ $(j > 1)$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求めれば，スペクトラル法での可視化結果を得ることができる．

一方，スペクトラル法の別の目的関数として，座標 x_i を $\sqrt{\gamma_i}$ でスケーリングした次式を考えることができる．

$$\mathcal{S}_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\left(\frac{x_i}{\sqrt{\gamma_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{\gamma_j}}\right)^2. \tag{3}$$

式 (3) は以下のように変形できる．

$$\mathcal{S}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}})\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は N 次元単位行列を表し，行列 $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}})$ はネットワークの Laplacian と呼ばれ，この行列の固有値は非負で 2 以下となる[2]．固有値 0 を与える自明な解は $\boldsymbol{x}_0 \propto \boldsymbol{\Gamma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ となる．

固有値が最小の非自明な解 $\boldsymbol{x}_1$ を求めるには，パワー法を土台としたアルゴリズムを適用できる．今，固有値の大小を反転させるため以下の目的関数を考える．

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

明らかに，自明な解の固有値は 2 で最大となり，その次に大きな固有値を持つ固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ は以下のように計算できる．

S1. $s = 1$ とし，$\|\boldsymbol{x}^{(0)}\| = 1$ で $\boldsymbol{x}^{(0)}$ を初期化；
S2. $\boldsymbol{x}^{(s)} = (2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^T)\boldsymbol{x}^{(s-1)}$；
S3. $\boldsymbol{x}^{(s)} = \boldsymbol{x}^{(s)}/\|\boldsymbol{x}^{(s)}\|$；
S4. $\|\boldsymbol{x}^{(s)} - \boldsymbol{x}^{(s-1)}\| < \epsilon$ なら反復終了；
S5. $s = s + 1$ とし，**S2** へ．

ここで，ϵ は終了条件を制御する正の小さな実数で，反復終了後に $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}^{(s)}$ として結果が求まる．

k 次元空間での可視化を行うためには，固有ベクトル群 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}\}$ が求まったとして，**S2** の計算式を以下のように変更して $\boldsymbol{x}_k$ を求めれば実現できる．

$$\boldsymbol{x}^{(s)} = (2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\left(\boldsymbol{I} - \sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j^T\right)\boldsymbol{x}^{(s-1)}. \tag{6}$$

すなわち，ノード v_i の k 次元空間での座標点は $(x_{i,1}, \cdots, x_{i,k})$ と求まる．

2.2 多次元尺度法

ノード系列 $(v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})$ において，隣り合う各ノード対 $(v_{i_{j-1}}, v_{i_j})$ にリンクがあるとき $(a_{i_{j-1},i_j} = 1)$，ノード v_{i_0} から v_{i_k} へのパスが存在すると言われ，そのパスのリンク数 k をパス長と呼ぶ．ここで，ノード v_i と v_j 間の距離（非類似度）を最短パス長 $g_{i,j}$ で定義すれば，全ノード集合を対象とした $N \times N$ の非類似度行列 $\boldsymbol{G}$ を考えることができる．古典的な多次元尺度法[5] は，$\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$ の制約の下で，次式を最大化する座標ベクトルを求める可視化法である．

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{x}^T\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/N$ は，中心化行列またはハウスホルダー変換行列と呼ばれ，任意の N 次元ベクトルに対し，その要素の総和（重心）が 0 になるよう平行移動させる行列である．

今，点集合 $\{y_1, \cdots, y_N\}$ が与えられ，2 点間 y_i と y_j の非類似度をユークリッド距離の自乗 $d_{i,j} = (y_i - y_j)^2$ で定義すれば，上記と同様に非類似度行列 $\boldsymbol{D}$ を考えることができ次式を得る．

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

明らかに，$\boldsymbol{x} \propto \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}$ で $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{D})$ は最大化され，適当な平行移動とスケーリングを施せば元の点集合の復元が可能になる．

目的関数 $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{G})$ を最大化する解 $\boldsymbol{x}_1$ は，行列 $(-\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H})$ の最大固有値を与える固有ベクト

ルに他ならない．よって，スペクトラル法の **S2** を変更するだけで，多次元尺度法の可視化アルゴリズムを得る．その計算式を，k 次元空間で可視化を行う一般のケースで記述すれば以下となる．

$$\boldsymbol{x}^{(s)} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{HGH}\left(\boldsymbol{I} - \sum_{j=1}^{k-1}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j^T\right)\boldsymbol{x}^{(s-1)}. \tag{9}$$

すなわち，スペクトラル法とは非常に類似しているが，多次元尺度法では，最短パス長で定義する非類似度行列を用いる点や，自明な解が存在しない点などは異なる．

2.3 バネモデル法

典型的なバネモデル法[3]は，次式を最小化する座標ベクトルを求める可視化法である．

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\kappa(x_i, x_j), \tag{10}$$

$$\kappa(x_i, x_j) = \beta_{i,j}\Big(g_{i,j} - \|x_i - x_j\|\Big)^2. \tag{11}$$

ここで，$\beta_{i,j}$ はバネ定数と呼ばれ，$\beta_{i,j} = \frac{1}{2g_{i,j}^2}$ に設定され，$g_{i,j}$ が大きいほど，自乗誤差の影響を小さくする働きを持つ．直感的には，仮想的に全ノード対にバネが装着されているとし，バネが伸び縮みしない自然長をノード間の最短パス長 $g_{i,j}$ に等しく設定すれば，バネは自然長に近くなるように伸び縮みすることで解が得られると考える．

バネモデル法による可視化アルゴリズムは，目的関数 $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$ の非線形最適化であり，一度に1つの座標点を動かす coordinate descent 法が採用される．目的関数 $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$ の x_i に関する1階偏微分 $\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x})$ は以下となる．

$$\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\mathcal{K}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \sum_{j\neq i}\frac{\partial\kappa(x_i, x_j)}{\partial x_i}. \tag{12}$$

任意の i で $\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x}) = 0$ となれば極値条件が満たされ最適化終了となる．座標点 x_i の更新にはニュートン法が適用され，その修正量は次式となる．

$$\Delta x_i = -\left(\frac{\partial^2\mathcal{K}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_i}\right)^{-1}\frac{\partial\mathcal{K}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}. \tag{13}$$

この更新により，各座標点での1階微分値の更新も必要になる．ただし，座標点 x_j $(j \neq i)$ に関しては，下記の効率の良い更新式が得られる．

$$\Delta\mathcal{K}_{x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial\kappa(x_i, x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial\kappa(x_i + \Delta x_i, x_j)}{\partial x_j}. \tag{14}$$

これはバネモデル法高速化の重要ポイントである．

上述したバネモデル法の可視化アルゴリズムをまとめれば以下となる．

K1. $\boldsymbol{x}^{(0)}$ を初期化し，全 j で $\mathcal{K}_{x_j}(\boldsymbol{x})$ を計算；
K2. $\max_i\{\|\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x})\|\} < \epsilon$ なら反復終了；
K3. $i = \arg\max_i\{\|\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x})\|\}$ を選択；
K4. 式 (13) で x_i，式 (14) で $\mathcal{K}_{x_j}(\boldsymbol{x})$ を更新；
K5. 式 (12) で $\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x})$ を更新し，**K2** へ．

ここでも，ϵ は終了条件を制御する正の小さな実数である．k 次元空間での可視化を行うには，$\|x_i - x_j\|$ を k 次元距離に拡張するだけで容易に行える．

2.4 クロスエントロピー法

クロスエントロピー法[7]は，次式を最小化する座標ベクトルを求める可視化法である．

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c(x_i, x_j), \tag{15}$$

$$c(x_i, x_j) = -a_{i,j}\log\rho(x_i, x_j) - (1 - a_{i,j})\log(1 - \rho(x_i, x_j)), \tag{16}$$

$$\rho(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|x_i - x_j\|^2\right). \tag{17}$$

すなわち，$\rho(x_i, x_j)$ は座標点間の類似度を定義し，この類似度と隣接行列要素とのクロスエントロピーを $c(x_i, x_j)$ で計算し，任意のノード対でのクロスエントロピーの総和の最小化が行われる．バネモデル法では，ネットワークの最短パス長で定義する非類似度行列を用いるのに対し，クロスエントロピー法では隣接行列のみ用いて可視化を行う．ただし，$\mathcal{K}_{x_i}(\boldsymbol{x})$ などを適切に $\mathcal{C}_{x_i}(\boldsymbol{x})$ などに置き換えれば，バネモデル法の可視化アルゴリズムをそのまま適用することができる．また，ク

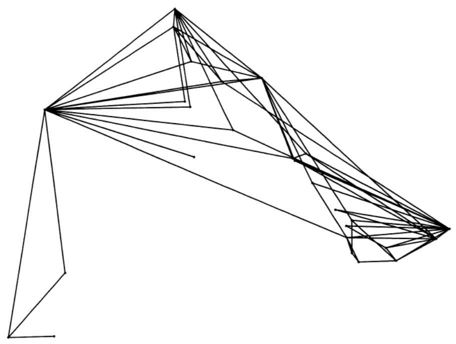


図 1　スペクトラル法（空手ネット）.

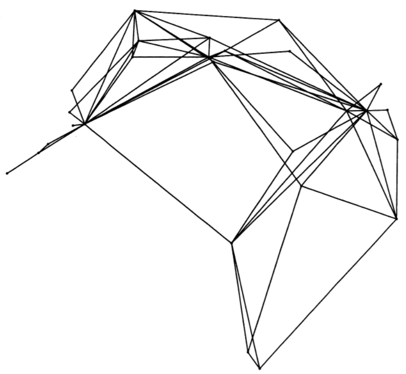


図 2　多次元尺度法（空手ネット）.

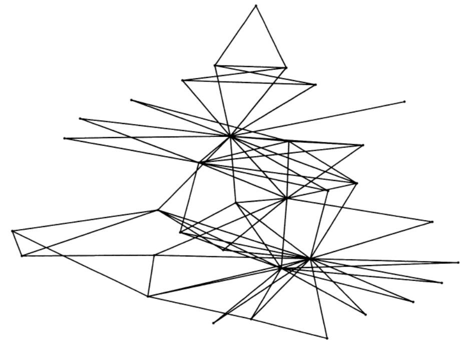


図 3　バネモデル法（空手ネット）.

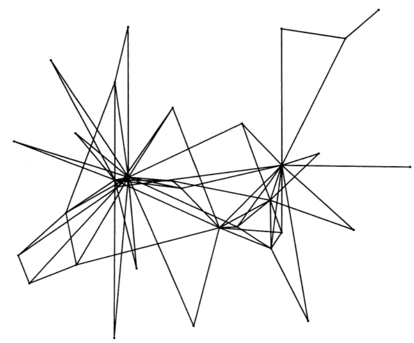


図 4　クロスエントロピー法（空手ネット）.

ロスエントロピー法でも，式 (17) の $\|x_i - x_j\|^2$ を k 次元版へ拡張することは容易に行える.

3. 可視化結果と考察

各手法での可視化結果を示すとともに，それぞれの特性を考察するため 3 種の実ネットワークを用いる．すなわち，比較的に小規模な空手ネットワーク[8]（ノード数 34，リンク数 78），Watts & Strogatz のスモールワールドに関する論文で取り上げられた電力ネットワーク[6]（ノード数 4,941，リンク数 6,594），およびブログのトラックバック（TB）からなるブログネットワーク[4]（ノード数 12,047，リンク数 39,960）である．各ネットワークの詳細は，それぞれ参考文献など参照されたい.

3.1 空手ネットワークの可視化

図 1 から図 4 は，空手ネットワークへの適用で，2 次元平面でのスペクトラル法，多次元尺度法，バネモデル法，および，クロスエントロピー法の可視化結果を示す．このような比較的に小規模なネットワークでは，ある程度の可視化結果がどの手法でも得られていることが分かる．最適化手法の観点では，図 1 と図 2 のスペクトラル法と多次元尺度法は，ある行列の固有ベクトルを求める点で類似し，これらの可視化結果では，比較的に次数の高いノード群が外部に配置されている．一方，図 3 と図 4 のバネモデル法とクロスエントロピー法は，非線形な目的関数を反復改善法で最適化し，これらの可視化結果では，比較的に次数の高いノード群が内部に配置されている．なお実験では，どの可視化プログラム（C 言語）もほとんど瞬時に結果を出力した.

3.2 電力ネットワークの可視化

図 5 から図 8 は，電力ネットワークへの適用で，各手法の可視化結果をそれぞれ示す．空手ネットワークの可視化結果と比較すれば，それぞれの手法での幾つかの特徴が見て取れる．図 5 のスペクトラル法の結果では，幾つかのクラスタ上に密集



図 5　スペクトラル法（電力ネット）.

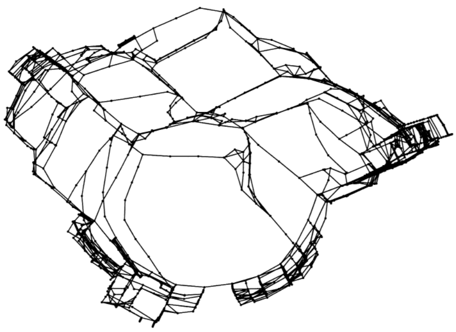


図 6　多次元尺度法（電力ネット）.

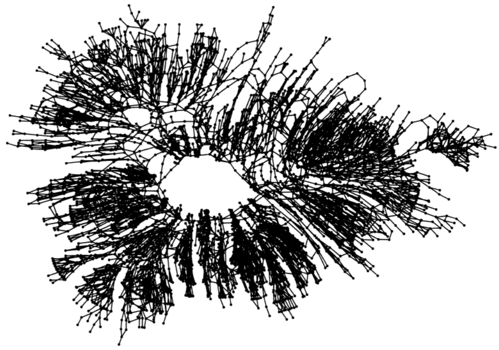


図 7　バネモデル法（電力ネット）.

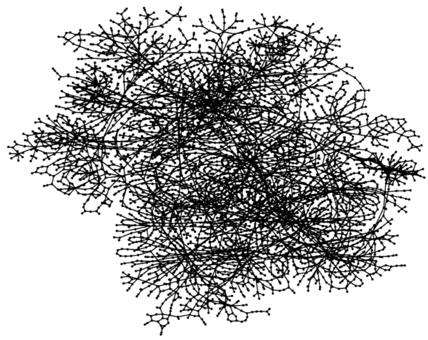


図 8　クロスエントロピー法（電力ネット）.

して点が配置され，抽象度の高いレベルでネットワーク構造を把握するときの有用性は示唆される．一方，図 6 と図 7 の多次元尺度法とバネモデル法の結果では，比較的に大きなリングのような構造が中心部に見て取れる．なお，多次元尺度法では，ある程度数のノードが重なっているため，比較的にノード数が少なくなっているように見える．これらに対して，クロスエントロピー法での結果では，リングのような構造は完全に見えなくなっている（図 8）．可視化手法への入力情報の観点では，スペクトラル法とクロスエントロピー法はネットワークの隣接行列を用いる．これに対して多次元尺度法とバネモデル法では，最短パス長で定義する非類似度行列を用いており，上述したリングのような構造を可視化するときに適している可能性が示唆される．なお，可視化に要する計算時間を比較すれば，スペクトラル法，多次元尺度法，バネモデル法，クロスエントロピー法の順で計算時間が増大し，クロスエントロピー法での可視化には数時間程度必要だった（1.86 GHz プロセッサ使用）．

3.3 ブログネットワークの可視化

図 9 から図 12 は，ブログネットワークへの適用で，各手法の可視化結果をそれぞれ示す．これら可視化結果からも分かるように，空手ネットワークや電力ネットワークと比較して，ある程度明確なコミュニティ構造を持つことがブログネットワークの特徴である．すなわち，図 9 のスペクトラル法では不明なものの，他の 3 手法ではネットワークが幾つかの島のように分かれているのが見て取れる．これら 3 手法の中では，クロスエントロピー法を用いたときに，コミュニティ構造を空間効率よく可視化していると考えられる．なお，使用計算機の性能や終了条件にも依存するが，クロスエントロピー法でこの規模のネットワークを可視化するには，1 日程度の計算時間が必要だった．

4. おわりに

今回紹介しただけでも，既に多様な可視化手法

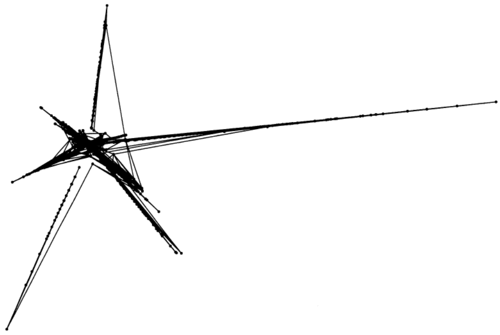


図 9　スペクトラル法（ブログネット）．



図 11　バネモデル法（ブログネット）．

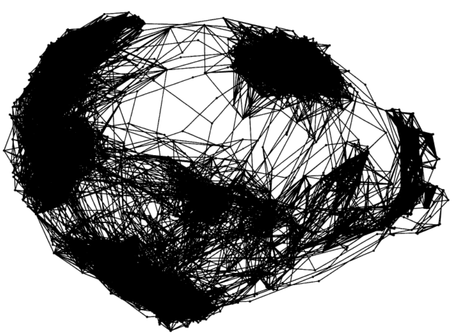


図 10　多次元尺度法（ブログネット）．

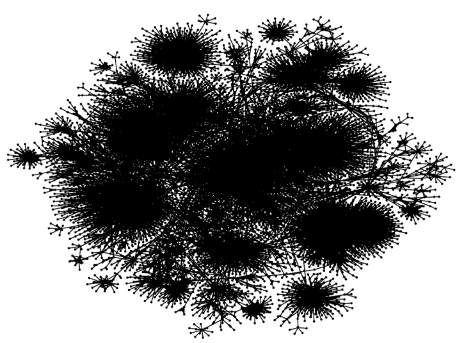


図 12　クロスエントロピー法（ブログネット）．

が存在し，実ネットワークを用いて，特にネットワークのサイズが大きくなるにしたがい，各手法での可視化結果に顕著な違いが現れることを紹介した．どのような可視化の目的に対して，どのような可視化法が適しているかを明確にすることは，今後の重要な研究課題と考えている．また今回は，重みなしの無向単純ネットワークを扱ったが，多様なネットワークでの可視化手法の探求も重要な研究テーマである．

参考文献

1) G. Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. Tollis, *Graph drawing: An annotated bibliography* (1999) Prentice–Hall, New Jersy.
2) F.R.K. Chung, *Spectral Graph Theory, Number 92 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics* (1997) American Mathematical Society.
3) T. Kamada, and S. Kawai, An algorithm for drawing general undirected graph. *Information Processing Letters*, **31** (1989) 7–15.
4) 斉藤和巳,『ウェブサイエンス入門—インターネットの構造を解き明かす—』(2007) NTT 出版.
5) W. Torgerson, *Theory and methods of scaling* (1958) Wiley, New York.
6) D.J. Watts and S.H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, **393** (1998) 440–442.
7) 山田武士・斉藤和巳・上田修功，クロスエントロピー最小化に基づくネットワークデータの埋め込み．情報処理学会論文誌，**44** (2003) 2401–2408.
8) W.W. Zachary, An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, **33** (1977) 452–473.

（さいとう・かずみ，静岡県立大学経営情報学部）

特　集（2008年3月号予告）

現代物理のための数学キーワード

最先端へのパスポート

本体952円

特　集（2008年1月号）

現象を視る

〈現象数理科学〉への誘い

本体952円

編集後記

今回とり上げたテーマは，現代物理学の最前線として注目されているものです．昔，私が学生だった頃やっていた原子核の話に，まさか弦理論の話が関係してくるとは当時夢にも思いませんでした．酒井・杉本先生や夏梅先生の記事はまさにその話です．これまでの歴史をみても，こうした発展はとても大きな成果を生むときだと予感します．　（伊崎）

＊　　＊

98年に開かれた国際会議Strings'98において超弦理論の進展を祝って，AdS/CFT対応を提唱したマルダセナの名前を冠した「ザ・マルダセナ」という歌が歌われたそうです．歌詞を見ると現代物理のキーワードがたくさんあります．

歌で知ることができる現代物理というのもなかなか面白いものです．　（大溝）

数　理　科　学　2月号

2008年2月1日発行　　発行人　木　下　敏　孝

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁